Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Article
УДК 37
DOI: 10.31161/1995-0659-2018-12-2-51-55

К проблеме подготовки магистров-математиков к научно-исследовательской работе

© 2018 **Зайнулабидов М. М.** [1], **Зайнулабидов Г. М.** [1], **Зайнулабидова З. М.** [1, 2]
[1] Дагестанский государственный педагогический университет,
Махачкала, Россия; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru; zzaynulabidova@mail.ru
[2] Многопрофильный лицей № 5,
Махачкала, Россия; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

РЕЗЮМЕ. Целью исследования является рассмотрение возможности обобщения известных для особых интегралов с ядрами Абеля, Коши, Трикоми, логарифмической особенности результатов на интегралы с более общими ядрами, с точки зрения привлечения магистров математического направления к творческой, исследовательской работе. В результате на конкретных примерах реализован **метод** исследования проблем путем сведения их к известным, простым случаям. В **результате** исследований получены формулы обращения интегральных уравнений с обобщенными ядрами Абеля, Коши-Трикоми, логарифмической особенности путем сведения их к интегральным уравнениям, решения которых известны. Основным **выводом** следует считать, что магистра-математика можно научить самостоятельно искать научные проблемы и заняться их решением методом обобщения, используя конкретные примеры.

Ключевые слова: интегральный оператор, обобщенные ядра Абеля, Коши, Трикоми, логарифмические особенности, решение особых интегральных уравнений.

Формат цитирования: Зайнулабидов М. М. Зайнулабидов Г. М. Зайнулабидова З. М. К проблеме подготовки магистров-математиков к научно-исследовательской работе // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2018. Т. 12. № 2. С. 51-55. DOI: 10.31161/1995-0659-2018-12-2-51-55

The problem of Mathematics Masters' Training for the Scientific Research Work

© 2018 **Mansur M. Zaynulabidov** [1], **Gazimagomed M. Zaynulabidov** [1], **Zaira M. Zaynulabidova** [1, 2]
[1] Dagestan State Pedagogical University,
Makhachkala, Russia; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru; zzaynulabidova@mail.ru
[2] Multidisciplinary Luceum No. 5,
Makhachkala, Russia; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

ABSTRACT. The **aim** of the article is to consider the opportunity of generalization of the knowns for the singular integrals with Abel, Cauchy, Tricomi kernels, logarithmic peculiarities of the results on the integrals with more general kernels, from the point of view of mathematics masters' involvement into the creative, research work. The **method** of research of the problems by the way of reducing them to the known, simple cases is realized. **Result**. The formulas of transformation the integrals equations with generalized Abel, Cauchy, Tricomi kernels, logarithmic peculiarity by the way of reducing them to the integrals equations are available from the research, the solution of it is known. **Conclusion**. It is possible to teach the masters of Mathematics to search the scientific problems self consistently and to solve them by the method of generalization using the case studies.

Keywords: integral operator, generalized Abel, Cauchy, Tricomi kernels, logarithmic peculiarities, solution of special integrals equations.

For citation: Zaynulabidov M. M., Zaynulabidov G. M., Zaynulabidova Z. M. The problem of Mathematics Masters' Training for the Scientific Research Work. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2018. Vol. 12. No. 2. Pp. 51-55. DOI: 10.31161/1995-0659-2018-12-2-51-55 (In Russia)

Введение

В работе [4] на одном конкретном примере показан путь подготовки магистров математического направления к научно-исследовательской работе.

Предлагаемая вниманию статья по существу является продолжением этой работы в плане обобщения полученных там результатов.

Рассмотрим интегральные операторы:

$$K_\delta\varphi=\int_x^a\left[\frac{a^2-bt^2}{(t-x)(a^2-bxt)}\right]^\delta\varphi(t)dt,\ 0\le x\le a\ (1);$$

$$K_1\varphi=\int_{-a}^{a}\frac{a^2-bt^2}{(t-x)(a^2-bxt)}\varphi(t)dt,\ -a\le x\le a\ (2);$$

$$K_2\varphi=\int_{-a}^{a}\ln\left|\frac{(t-x)a^2}{a^2-bxt}\right|\varphi(t)dt,\ -a\le x\le a\ (3),$$

где $a>0$, $0<\delta<1$, $0\le b\le 1$ – действительные параметры.

Оператор $K_\delta\varphi$ является обобщением известного оператора с ядром Абеля [3; 7], так как при $b=0$ он совпадает с ним.

Оператор $K_1\varphi$ является обобщением оператора с ядрами Коши и Трикоми [1-3; 5; 6; 8], так как он совпадает с оператором Коши при $b=0$ и с оператором Трикоми при $b=1$.

Оператор $K_2\varphi$ является обобщением оператора с логарифмической особенностью, так как он при $b=0$ совпадает с хорошо изученным оператором с логарифмической особенностью [1; 3; 4].

По этой причине разумно называть ядро в (1) обобщенным ядром Абеля, ядро в (2) – обобщенным ядром Коши-Трикоми, ядро в (3) – обобщенным ядром с логарифмической особенностью.

Возникает проблема исследования операторов (1), (2), (3) на предмет изучения их свойств и возможных приложений по аналогии с известными результатами для операторов с обычными ядрами Абеля, Коши, Трикоми, логарифмической особенности, которая может быть изучена при подготовке магистров-математиков к научно-исследовательской работе в рамках курсов по выбору или учебно-исследовательской практики.

Естественно, такая проблема может стать темой магистерской диссертации с последующим выходом на более серьезные научные исследования.

Проведенные исследования и полученные результаты настоящей статьи являются примером изучения этой проблемы в плане получения решений в замкнутой форме интегральных уравнений первого рода.

$$K_\delta\varphi=f(x),\ K_1\varphi=f(x),\ K_2\varphi=f(x)\ (4),$$

где искомая функция $\varphi(x)$ и заданная функция $f(x)$ настолько гладкие, что все проводимые в статье операции над ними допустимы.

Естественно, в случае надобности, потребная гладкость функции $\varphi(x)$, $f(x)$ для каждого из уравнений (4) может быть установлена более конкретно.

Например, допуская существование $f'(x)$ и дифференцируя обе части уравнения $K_2\varphi=f(x)$, получим уравнение

$$\int_{-a}^{a}\frac{a^2-bt^2}{(t-x)(a^2-bxt)}\varphi(t)dt=-f'(x),$$

которое совпадает с $K_1\varphi=-f'(x)$.

Кстати, этот факт позволяет нам ограничиться нахождением решений интегральных уравнений с обобщенным ядром Абеля:

$$\int_x^a\left[\frac{a^2-bt^2}{(t-x)(a^2-bxt)}\right]^\delta\varphi(t)d(t)=f(x)\ (5)$$

и с обобщенным ядром Коши –Трикоми:

$$\int_{-a}^{a} \frac{a^2 - bt^2}{(t-x)(a^2 - bxt)} \varphi(t)dt = f(x) \quad (6)$$

Материалы и результаты исследований

Рассмотрим уравнение (5), решение которого при *b=0*, как известно [3; 7] представимо в виде:

$$\varphi(x) = -\frac{\sin \pi\delta}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{x}^{a} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\delta}} \quad (7)$$

Пусть *b≠0.* Тогда первой вероятной мыслью исследователя-магистра будет мысль попробовать преобразовать (5), так чтобы можно было бы использовать равенство (7).

Рассуждая в этом плане, он раскрывает скобки в знаменателе и группируя слагаемые в другой форме, приходит к равенству:

$$= \begin{matrix} (t-x)(a^2 - bxt) = t(a^2 + bx^2) - x(a^2 + bt^2) = \\ (\frac{t}{a^2 + bt^2} - \frac{x}{a^2 + bx^2})(a^2 + bt^2)(a^2 + bx^2) \end{matrix} \quad (8),$$

которое подсказывает дальнейший путь действия: ввести замену переменных:

$$\tau = \frac{t}{a^2 + bt^2}, \; y = \frac{x}{a^2 + bx^2} \quad (9).$$

Поскольку при *t=x* новая переменная $\tau =$ y, то естественно, желательно сделать так, чтобы при *t=a* было бы $\tau = a$, что замена (9) не обеспечивает.

Таким образом, исследователь приходит к выводу, что вместо (9) надо ввести замену

$$\tau = \frac{a^2(1+b)t}{a^2 + bt^2}, \; y = \frac{a^2(1+b)x}{a^2 + bx^2} \quad (10).$$

При этом получаем

$$d\tau = \frac{a^2(1+b)(a^2 - bt^2)}{(a^2 + bt^2)^2} dt \quad (11).$$

С учетом (8), (10) и (11) можно показать, что (5) представимо в виде

$$f_1(y) = \int_{y}^{a} \frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{(\tau - y)^{\delta}} \quad (12),$$

где

$$\varphi_1(\tau) = \left[a^2(1+b)(a^2 - bt^2)\right]^{\delta-1} (a^2 + bt^2)^{2-\delta} \varphi(t)$$

$$f(y) = (a^2 + bx^2)^{\delta} f(x).$$

Из (12) согласно (7) получим:

$$\varphi_1(y) = -\frac{\sin \pi\delta}{\pi} \frac{d}{dy} \int_{y}^{a} \frac{f_1(\tau)}{(\tau - y)^{1-\delta}} d\tau \quad (13)$$

Чтобы получить решение для (5) остается только перейти в (13) к старым переменным x и t.

При этом следует обратить внимание на то, что нет необходимости из (10) выразить *x* и *t* через *y* и τ, достаточно учесть равенство:

$$\frac{d}{dy} = \frac{dx}{dy}\frac{d}{dx} = \frac{(a^2 + bx^2)^2}{a^2(b+1)(a^2 - bx^2)} \frac{d}{dx} \quad (14).$$

В результате перехода в (13) к переменным *x* и *t* с учетом (10), (11), (14) путем элементарных преобразований получим формулу обращения (5):

$$\left(\frac{a^2 - bx^2}{a^2 + bx^2}\right)^{\delta} \varphi(x) = -\frac{\sin \pi\delta}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{x}^{a} \frac{(a^2 + bx^2)^{1-\delta}(a^2 - bt^2) f(t)dt}{(a^2 + bt^2)\left[(t-x)(a^2 - bxt)\right]^{1-\delta}}, \quad (15)$$

которая, как и следовало ожидать, совпадает с (7) при *b=0.*

Рассматривая уравнение (6) и переходя в нём к переменным τ и y согласно (10), легко понять, что получится хорошо изученное уравнение:

$$f_1(y) = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_1(\tau)d\tau}{\tau - y} \quad (16),$$

с ядром Коши [1; 3; 5; 7], где

$$f_1(y) = (a^2 + bx^2) f(x), \varphi(\tau) = (a^2 + bt^2)\varphi(t)$$

Общее решение (16) имеет представление [см. 1]

$$\varphi_1(y) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} \left[\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau - y} f_1(\tau)d\tau + C\right], \; C \in R \quad (17)$$

Существует и ограниченное вблизи конца *a* единственное решение (16) которое имеет вид:

$$\varphi_1(y) = -\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{(a+\tau)(a-y)}{(a-\tau)(a+y)}} f_1(\tau)dt \quad (18)$$

Если дополнительно заданная функция $f_1(y)$ подчинена условию

$$\int_{-a}^{a} \frac{f_1(\tau)d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}} = 0 \quad (19),$$

то существует также ограниченное на обоих концах решение (16), которое имеет вид:

$$\varphi_1(y) = -\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a^2-y^2}{a^2-\tau^2}} \frac{f_1(\tau)d\tau}{\tau - y}, \ -a<y<a \quad (20).$$

Возвращаясь в (17), (18), (19), (20) к переменным x и t согласно (10), можно выписать аналогичные формулы обращения для уравнения (6).

Например, из равенства (17) можно получить формулу:

$$\varphi(x) = -\frac{a^2+bx^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-b^2x^2)}}\left[\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{(a^2-t^2)(a^2-b^2t^2)}}{(t-x)(a^2-btx)} * \frac{a^2-bt^2}{a^2+bt^2} f(t)dt + \frac{c}{a}\right], \quad (21),$$

которая совпадает с решением (6) в случае $b=0$

В заключении заметим, что по существу проведённые исследования достаточны, для того чтобы понять, как можно направить магистра математического направления к поиску научных проблем методом обобщения и работы над их решениями, используя при этом известные для частных случаев результаты.

Например, в данном конкретном случае перед магистром должна возникнуть проблема поиска решения уравнения:

$$f(x)= \alpha\int_{-a}^{x}\left[\frac{a^2-bt^2}{(x-t)(a^2-bxt)}\right]^{\delta}\varphi(t)dt + \beta\int_{x}^{a}\left[\frac{a^2-bt^2}{(t-x)(a^2-bxt)}\right]^{\delta} \quad (22),$$

где $a^2+\beta^2 \neq 0$,сначала когда α и β действительные числа, а затем когда α и βфункции.

Аналогично должна появиться мысль исследовать уравнение:

$$\alpha\varphi(x) + \beta\int_{-a}^{a} \frac{(a^2-bt^2)\varphi(t)}{(t-x)(a^2-bxt)}dt = f(x) \quad (23)$$

как при постоянных α и β, так и когда они являются функциями.

Естественно, проблема исследования уравнений (22) и (23) может способствовать определению тематики магистерской диссертации по этому направлению, которое в дальнейшем может стать темой научных исследований более высокого уровня.

Идеи, заложенные здесь, к сожалению, представители психолого-педагогических и методических наук воспринимают не совсем адекватно, так как, во-первых, здесь математический язык изложения текста, плохо понимаемый ими, а, во-вторых, они не очень привыкли к такому подходу подготовки обучающихся к творческой работе.

Однако следует отметить, что именно такой подход к подготовке магистров и других направлений к творческой работе хорошо себя оправдывает. При этом важно суметь правильно определить исходную позицию, которая приведет исследователя к новой научной проблеме, к необходимости решения новых задач в той или иной отрасли науки. Ясно, что в этом роль научного руководителя, как знатока науки, очень высока, поскольку только он может определить исходную позицию и направить работу магистра в нужном направлении.

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976. 295 с.
2. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. Зайнулабидов М. М., Зайнулабидов Г. М., Зайнулабидова З. З. Подготовка магистров к поиску и решению научных проблем математики // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2017. Т. 11. № 3. С. 105-109.
5. Мусхелишвили М. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 514 с.
6. Смирнов М. И. Уравнения смешанного типа. М. : Высшая школа, 1985. 304 с.
7. Сабитов К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М. : Высшая школа, 2005. 671 с.

8. Трикоми Ф. О. Линейные уравнения смешанного типа. М.-Л. : Гостехиздат, 1947. 192 с.

References

1. Bitsadze A. V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 295 p. (In Russian)
2. Bitsadze A. V. *Nekotoryye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 448 p. (In Russian)
3. Gakhov F. D. *Krayevyye zadachi* [Boundary value problem]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (In Russian)
4. Zaynulabidov M. M., Zaynulabidov G. M., Zaynulabidova Z. Z. Preparation of masters to search and solve scientific problems of mathematics. *Izvestiya Dagestanskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Psikhologo-pedagogicheskiye nauki* [Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences]. 2018. Vol. 11. No. 3. Pp. 105-109. (In Russian)
5. Muskhelishvilly M. I. Singulyarnyye integral’nyye uravneniya [Singular integral equation]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 514 p. (In Russian)
6. Smirnov M. I. *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of mixed type]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 304 p. (In Russian)
7. Sabitov K. B. *Funktsional'nye, differentsial'nye i integral'nye uravneniya* [Functional, differential and integral equations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005. 671 p. (In Russian)
8. Trikomi F. O. *Linejnye uravneniya smeshannogo tipa* [Simple equations of mixed type]. Moscow-Leningrad, 1947. 192 p. (In Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
Принадлежность к организации

Зайнулабидов Мансур Магомедович, кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра высшей математики, факультет математики, физики и информатики (ФМФиИ), Дагестанский государственный педагогический университет (ДГПУ), Махачкала, Россия; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

Зайнулабидов Газимагомед Магомедович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра технологии и методики обучения, факультет технологии и профессионально педагогического образования (ФТиППО), ДГПУ, Махачкала, Россия; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

Зайнулабидова Заира Мансуровна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра технологии и методики обучения, ФТиППО, ДГПУ, заместитель директора по научно-методической работе, Многопрофильный лицей № 5, Махачкала, Россия; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

Принята в печать 18.04.2018 г.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS
Affiliations

Mansur M. Zaynulabidov, Ph. D. (Physics and Mathematics), professor, the chair of Advanced Mathematics, the faculty of Mathematics, Physics and Computer Science (FMPCS), Dagestan State Pedagogical University (DSPU), Makhachkala, Russia; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

Gazimagomed M. Zaynulabidov, Ph. D. (Physics and Mathematics), assistant professor, the chair of Technology and Its Teaching Methods (TTM), the faculty of Technology and Professional Pedagogical Education (FTPPE), DSPU, Makhachkala, Russia; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

Zaira M. Zaynulabidova, Ph. D. (Physics and Mathematics), assistant professor, the chair of TTM, FTPPE, DSPU; deputy director for Science and Methods, Multidisciplinary Lyceum No. 5, Makhachkala, Russia; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

Received 18.04.2018.