

## Подготовка магистров к поиску и решению научных проблем математики

© 2017 Зайнулабидов М. М.<sup>1</sup>, Зайнулабидов Г. М.<sup>1</sup>,  
Зайнулабидова З. М.<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Дагестанский государственный педагогический университет,  
Махачкала, Россия; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

<sup>2</sup> Многопрофильный лицей № 5,  
Махачкала, Россия; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

**РЕЗЮМЕ.** Данные исследования преследуют **цель** показать на конкретном примере один из методов реализации, занимающем значительное место в образовательной программе обучения, проблеме подготовки магистров математического направления к творческой научно-исследовательской работе. **Метод** исследования. Рассмотрен обобщенный вариант одного интегрального уравнения, который создает новые проблемы, требующие изучения. Методами преобразования и замены переменных показано, как научить магистра найти решение этих проблем. **Результат.** Найдено решение интегрального уравнения, являющегося обобщенным вариантом исследованного ранее уравнения, на основе чего сформулирована новая проблема, которая может быть темой магистерской диссертации. **Вывод.** Из полученных результатов следует, что магистра математического направления при направляющем участии научного руководителя можно научить, самостоятельно создать научные проблемы и заняться их решением, методом обобщения, исходя из ранее исследованных проблем.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, логарифмическая особенность в ядре, подвижная и неподвижная особенности, ядра Коши, Трикоми.

---

**Формат цитирования:** Зайнулабидов М. М., Зайнулабидов Г. М., Зайнулабидова З. М. Подготовка магистров к поиску и решению научных проблем математики // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2017. Т. 11. № 3. С. 105-109.

---

## Graduates' Training for the Search and Solving of the Mathematics Scientific Problems

© 2017 Mansur M. Zaynulabidov<sup>1</sup>, Gazimagomed M. Zaynulabidov<sup>1</sup>,  
Zaira M. Zaynulabidova<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Dagestan State Pedagogical University,  
Makhachkala, Russia; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

<sup>2</sup> Multidisciplinary Luceum No. 5,  
Makhachkala, Russia; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

**ABSTRACT.** The **aim** of the article is to show on the specific example the one of the methods of realization, which occupies a significant place in the educational programme of teaching, problem of the graduates of Mathematics training for the creative research work. **Method.** The authors consider a generalized version of one integral equation, which creates the new problems demand to be studied. By the methods of transformation and the change of variables it is demonstrated how to teach the graduate to find the solving of these problems. **Result.** The authors of the article find the solution of integral equation, which is the generalized variant of the previously researched equation and based on it the new problem, that may be the topic of master's dissertation is defined. **Conclusion.** From the results, it follows that it is possible to teach

the graduate of Mathematics by the direct participation of supervisor to create independently the scientific problems and to solve them by the method of generalization, on the bases of previously researched problems.

**Keywords:** integral equation, logarithmic singularity in the kernel, fixed and mobile features, Cauchy, Tricomi kernel.

**For citation:** Zaynulabidov M. M., Zaynulabidov G. M., Zaynulabidova Z. M. Graduates' Training for the Search and Solving of the Mathematics Scientific Problems // Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2017. Vol. 11. No. 3. Pp. 105-109. (In Russian)

## Введение

Известно, что в механике сплошной среды при математическом моделировании процессов часто встречается интегральное уравнение первого рода

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t-x| \varphi(t) dt = f(x), -1 < x < 1 \quad (1)$$

относительно искомой функции  $\varphi(x)$  с логарифмической особенностью в ядре.

Уравнение (1) хорошо изучено [1] и его общим решением является функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-x^2}} \frac{f'(t) dt}{t-x} + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2)$$

где  $C$  – произвольная действительная постоянная, а  $f'(x)$  – заданная функция, удовлетворяющая на интервале  $-1 < x < 1$  условию Гельдера.

Функция (2) получается, как решение интегрального уравнения с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = -f'(x), -1 < x < 1 \quad (3),$$

к которому сводится (1) в результате дифференцирования обеих частей равенства.

Если учесть возможные критические ситуации изучаемого явления на концах отрезка, то математической моделью изучаемой задачи может оказаться уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{t-x}{1-tx} \right| \varphi(t) dt = f(x), -1 < x < 1, \quad (4)$$

в ядре которого, наряду с подвижной особенностью  $t-x=0$  имеется и неподвижная особенность  $1-tx=0$  на концах промежутка интегрирования.

С точки зрения науки вместо (1) и (4) можно рассматривать более общее уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{t-x}{\alpha - \beta tx} \right| \varphi(t) dt = f(x), -1 < x < 1 \quad (5),$$

где постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , для которого (1) и (4) являются частными случаями.

Таким образом возникла научная проблема исследования уравнения (5) и его частного случая (4).

Предлагаемая заметка посвящена нахождению решения уравнения (5), а следовательно и (4), исходя из общего решения (2) уравнения (1).

**Цель** – исследование проблемы подготовки магистров математического направления к творческой научно-исследовательской работе.

## Материалы и методы исследования

Допуская существование функции  $f'(x)$ ,  $-1 < x < 1$  и дифференцируя (5), получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha - \beta t^2}{(t-x)(\alpha - \beta tx)} \varphi(t) dt = -f'(x), -1 < x < 1 \quad (6).$$

Следует обратить внимание на то, что уравнение (6) при  $\beta = 0$  совпадает с (3), а при  $\alpha = 0$  совпадает с уравнением такого же вида относительно неизвестной функции  $t\varphi(t)$  с правой частью  $-xf'(x)$ . Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти решение (6) для других допустимых значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

С целью решения этой задачи перепишем (6) в эквивалентной форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha - \beta t^2}{t(\alpha + \beta x^2) - x(\alpha + \beta t^2)} \varphi(t) dt = -f'(x) \quad (8).$$

Имеют место очевидные равенства

$$t(\alpha + \beta x^2) - x(\alpha + \beta t^2) = \left( \frac{t}{\alpha + \beta t^2} - \frac{x}{\alpha + \beta x^2} \right) (\alpha + \beta t^2)(\alpha + \beta x^2),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{t}{\alpha + \beta t^2} \right) = \frac{\alpha - \beta t^2}{(\alpha + \beta t^2)^2} \quad (9),$$

которые подсказывают разумность перехода в (8) к новым переменным согласно равенствам

$$s = \frac{(\alpha + \beta)t}{\alpha + \beta t^2}, y = \frac{(\alpha + \beta)x}{\alpha + \beta x^2} \quad (10).$$

Из (9) следует, что возможность перехода к переменной интегрирования,  $s$  зависит от знака  $\alpha - \beta t^2$

В случае, когда  $\alpha \geq \beta$  функция  $s = s(t)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  из (10) монотонно возрастает,

однозначно отображая отрезок  $[-1, 1]$  на себя, вследствие чего такая замена переменной интегрирования допустима.

В результате замены (10) при  $\alpha \geq \beta$  уравнение (8) сводится к уравнению вида (3):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(s)}{s-y} ds = f_1(y), -1 < y < 1 \quad (11),$$

где  $\varphi_1(s) = (\alpha + \beta t^2)\varphi(t)$ ,  $f_1(y) = -(\alpha + \beta x^2)f'(x)$ ,

$$t = \frac{2\alpha s}{(\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta s^2}}, x = \frac{2\alpha y}{(\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta y^2}} \quad (12).$$

Выписав решение (11) согласно формуле (2) и, возвращаясь к старым переменным  $t$  и  $x$  получим, что общее решение  $\varphi(t)$  уравнения (8) при  $\alpha \geq \beta$  имеет представление

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{(1-t^2)(\alpha^2 - \beta^2 t^2)}{(1-x^2)(\alpha^2 - \beta^2 x^2)}} \cdot \\ &\cdot \frac{(\alpha + \beta x^2)(\alpha - \beta t^2)f'(t)}{(\alpha + \beta t^2)(t-x)(\alpha - \beta xt)} dt \\ &+ \frac{C(\alpha + \beta x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(\alpha^2 - \beta^2 x^2)}} \quad (13), \end{aligned}$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

В случае  $\alpha < \beta$  для осуществления замены переменной интегриации отрезок  $[-1, 1]$  необходимо делить на три части  $\left[-1, -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right], \left[-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right], \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, 1\right]$ , так как функция  $s=s(t)$  из (10) на отрезке  $\left[-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right]$  монотонно возрастает, а на двух других отрезках монотонно убывает.

Аналогично необходимо рассматривать и функцию  $y=y(x)$  из (10).

Следовательно, в результате осуществления замены переменных по формулам (10) при  $\alpha < \beta$  получится интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \left( \int_{-1}^{s_1} + \int_{s_1}^{s_2} + \int_{s_2}^1 \right) \frac{\varphi_1(s) ds}{s-y} = f_1(y) \quad (14),$$

где  $\varphi_1(s) = (\alpha + \beta t^2)\varphi(s)$ ,  $f_1(y) = -(\alpha + \beta t^2)f'(x)$ ,

$$s_1 = -\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}, s_2 = \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}; t \text{ и } x \text{ в}$$

промежутке  $\left[-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right]$  определяются равенствами (12), а на других двух отрезках – равенствами

$$\begin{aligned} t &= \frac{2\alpha s}{(\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta s^2}}, x = \\ &= \frac{2\alpha y}{(\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta y^2}} \quad (14) \end{aligned}$$

Для нахождения решения (14) необходимо использовать более тонкую теорию обращения таких уравнений, которую можно найти в любой из известных монографий [3; 11].

Таким образом, вырисовывается научная проблема исследования интегральных уравнений с ядрами Коши, когда искомая и заданная функции являются ступенчатыми, как в (14), которая может быть темой магистерской диссертацией. По этой причине разумность нахождения решения (14) в предлагаемой краткой заметке отпадает.

Следует обратить внимание на еще один интересный факт, вытекающий из проведенных исследований.

Из легко проверяемого равенства

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta t^2}{t(\alpha + \beta x^2) - x(\alpha + \beta t^2)} &= \\ &= \frac{1}{t-x} - \frac{\beta t}{\alpha - \beta tx} \quad (15) \end{aligned}$$

следует, что при  $\alpha = \beta$  уравнение (8) совпадает с интегральным уравнением первого рода с ядром Трикоми [13]

Впервые решение уравнения Трикоми такого вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) \varphi(t) dt &= \\ &= f(x) \quad (16) \end{aligned}$$

другим методом было найдено Бицадзе А. В. в [2, с. 23].

К сожалению по досадной случайности в [2] при написании решения (16) допущена неточность в классе указанных в [2] функции.

Если искать решение  $\varphi(x)$  уравнения (16) в классе указанных в [2] функций методом замены переменных типа (10), то оно может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x(1-t)}{t(1-x)} \left( \frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt} \right) f(t) dt = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1-t}{1-x} \left( \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt} \right) f(t) dt \quad (17). \end{aligned}$$

Что касается общего решения (16), то оно имеет представление

$$\frac{\varphi(x)(1-x)x}{1-2x+2x^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{1-2t+2t^2} \left( \frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt} \right) f(t) dt + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Решение интегрального уравнения второго рода с ядром Трикоми методом замены переменных типа (10) впервые было найдено в [4; 5], что в последующем нашло свое отражение в учебных пособиях [10; 12].

Проведенные в предлагаемой заметке исследования показывают, что этим же методом можно найти решение более общего интегрального уравнения

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{t-x} - \frac{\beta t}{\alpha - \beta xt} \right) \varphi(x) dt = f(x), \alpha \neq \beta \quad (18).$$

Следует обратить внимание также и на то, что уравнения (6) и (18) заменой переменных согласно равенством

$$\sqrt{\beta}t = \sqrt{\alpha}S, \sqrt{\beta}x = \sqrt{\alpha}y, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

могут быть сведены к уравнениям с ядром Трикоми.

В самом деле, как легко показать, в результате такой замены, например, (18) примет вид

$$\varphi \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left( \frac{1}{s-y} - \frac{s}{1-sy} \right) \varphi \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} s \right) ds = f \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y \right) \quad (19),$$

$$\text{где } \gamma_1 = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \gamma_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Решение (19) можно найти методом, предложенным в [4]. Естественно и здесь необходимо рассматривать случаи  $[-1, 1] \subseteq [\gamma_1, \gamma_2]$  и  $[\gamma_1, \gamma_2] \subseteq [-1, 1]$  отдельно.

### Заключение

Полученные результаты показывают, что в процессе обучения можно осуществить подготовку магистров к творческой, научно-исследовательской работе, к поиску и решению проблем науки путем знакомства их с конкретными примерами, допускающими обобщения.

В настоящей работе за основу взято конкретное интегральное уравнение, имеющее прикладное значение и допускающее разумное обобщение, которое сводит к возможной теме магистерской диссертации.

Ясно, что в иных случаях исходными и допускающими обобщения могут быть и другие математические объекты, например, дифференциальные уравнения типа исследованных в работах [6-9].

### Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.
2. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешенного типа. Труды математического института АН СССР. 1953. Т. 41. 59 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Зайнулабидов М. М. О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 91-99.
5. Зайнулабидов М. М., Зайнулабидов Г. М., Зайнулабидова З. М. О некоторых нелинейных уравнениях типа Кортвега де Фриза // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. 2013. № 2. С. 6-8.
6. Зайнулабидов М. М., Зайнулабидов Г. М., Зайнулабидова З. М. Обобщенное уравнение Даламбера и его нелинейный аналог // Известия

Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. 2015. № 2. С. 11-13.

7. Зайнулабидов М. М., Зайнулабидов Г. М., Зайнулабидова З. М. О нелинейных математических моделях некоторых задач естествознания, когда искомая величина является функцией времени и линейного перемещения // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. 2016. Т. 10. № 3. С. 15-20.

8. Крикунов Ю. М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Казань: Изд-во КФУ, 1986. 148 с.

9. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 512 с.

10. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.

11. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. Перевод с итал. Ф. И. Франкля. М. : Гостехиздат, 1947. 192 с.

## References

1. Bitsadze A. V. *Uravnenie matematicheskoy fiziki* [Equation of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 336 p. (In Russian)

2. Bitsadze A. V. *K probleme uravneniy smeshennogo tipa. Trudy matematicheskogo instituta AN SSSR* [On the problem of equations of mixed type. Proceedings of the mathematical Institute of the USSR. 1953. Vol. 41. 59 p. (In Russian)

3. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (In Russian)

4. Zaynulabidov M. M. On some boundary value problems for equations of mixed type with two perpendicular lines of degeneration. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1969. Vol. 5. No. 1. Pp. 91-99. (In Russian)

5. Zaynulabidov M. M., Zaynulabidov G. M., Zaynulabidova Z. M. On some nonlinear equation of type Korteweg de Vries. *Izvestiya Dagestanskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Estestvennye i tochnye nauki* [Dagestan State Pedagogical University. Journal. Natural and Exact Sciences]. 2013. No. 2. Pp. 6-8. (In Russian)

6. Zaynulabidov M. M., Zaynulabidov G. M., Zaynulabidova Z. M. The generalized d'Alembert equation and its nonlinear analogue. *Izvestiya Dagestanskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Estestvennye i*

*tochnye nauki* [Dagestan State Pedagogical University. Journal. Natural and Exact Sciences]. 2015. № 2. Pp. 11-13. (In Russian)

7. Zaynulabidov M. M., Zaynulabidov G. M., Zaynulabidova Z. M. Nonlinear mathematical models of some problems of the natural science, when the desired value is a time and a linear motion function. *Izvestiya Dagestanskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Estestvennye i tochnye nauki* [Dagestan State Pedagogical University. Journal. Natural and Exact Sciences]. 2016. Vol. 10. No. 3. Pp. 15-20. (In Russian)

8. Krikunov Yu. M. *Kraevye zadachi dlya model'nykh uravneniy smeshannogo tipa* [Boundary value problem for model equations of mixed type]. Kazan, KFU Publ., 1986. 148 p. (In Russian)

9. Muskhevishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 512 p. (In Russian)

10. Smirnov M. M. *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of mixed type]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1985. 304 p. (In Russian)

11. Triкоми F. O. *O lineynykh uravneniyakh smeshannogo tipa* [On linear equations of mixed type]. Translated from the Italian by F. I. Frankl. Moscow, Gostekhisdat Publ., 1947. 192 p. (In Russian)

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

## Принадлежность к организации

**Зайнулабидов Мансур Магомедович**, кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра высшей математики, факультет математики, физики и информатики (ФМФИИ), ДГПУ, Махачкала, Россия; e-mail: nauka\_dgpu@mail.ru

**Зайнулабидов Газимагомед Магомедович**, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра технологии и методики обучения, факультет технологии и профессионально педагогического образования (ФТиППО), ДГПУ, Махачкала, Россия; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

**Зайнулабидова Заира Мансуровна**, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра технологии и методики обучения, ФТиППО, ДГПУ, заместитель директора по научно-методической работе, МБОУ «Многопрофильный лицей № 5», Махачкала, Россия; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

*Принята в печать 11.06.2017 г.*

## INFORMATION ABOUT AUTHORS

## Affiliations

**Mansur M. Zaynulabidov**, Ph. D. (Physics and Mathematics), professor, the chair of Advanced Mathematics, the faculty of Mathematics, Physics and Computer Science (FMPCS), DSPU, Makhachkala, Russia; e-mail: nauka\_dgpu@mail.ru

**Gazimagomed M. Zaynulabidov**, Ph. D. (Physics and Mathematics), assistant professor, the chair of Technology and Its Teaching Methods, the faculty of Technology and Professional Pedagogical Education (FTPPE), DSPU, Makhachkala, Russia; e-mail: zaynulabidov48@mail.ru

**Zaira M. Zaynulabidova**, Ph. D. (Physics and Mathematics), assistant professor, the chair of Technology and Its Teaching Methods, FTPPE, DSPU; deputy director for Science and Methods, MBEI "Multidisciplinary Lyceum No 5", Makhachkala, Russia; e-mail: zzaynulabidova@mail.ru

*Received 11.06.2017.*