Педагогические науки / Pedagogical Sciences
Оригинальная статья / Original Article
УДК 378.147 (018) / UDC 378.147 (018)

О построении классов элементарных функций в комплексной модели обучения математике в вузе

©2016 **Ярахмедов Г. А.**
Дагестанский государственный педагогический университет,
Махачкала, Россия; e-mail: yari.85@mail.ru

РЕЗЮМЕ. Цель. На основе методологических принципов комплексного подхода выявить логическую схему познавательной деятельности для структурирования и построения классов элементарных функций на уровне профессионального образования. **Методы.** Методы анализа, взаимно обратных отображений, аналогии и метод единства противоположностей. **Результаты.** Предложена новая методика построения классов элементарных функций на основе метода единства дифференциального и интегрального, позволяющая наиболее эффективно применить свойства элементарных функций для построения математических моделей и решения задач прикладного характера. **Выводы.** Комплексная модель обучения математике дает возможность оптимального выбора содержания математического образования с учетом психолого-педагогических особенностей субъектов познавательной деятельности и упрощения логических схем восприятия сложных математических понятий в зависимости от уровня обучения математике.

Ключевые слова: комплексный подход, комплексное мышление, комплексная модель обучения, тройственность, итерация, суперпозиция, дополнение, класс элементарных функций.

Формат цитирования: Ярахмедов Г. А. О построении классов элементарных функций в комплексной модели обучения математике в вузе // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-Педагогические науки. 2016. Т. 10. № 4. С. 126-131.

Creation the Classes of Elementarily Functions in the Integrated Model of Teaching Mathematics at University

©2016 **Gadzhiakhmed A. Yarakhmedov**
Dagestan State Pedagogical University,
Makhachkala, Russia; e-mail: yari.85@mail.ru

ABSTRACT. Aim. The aim of this research is to identify the logic scheme of cognitive activity for structuring and creation the classes of elementarily functions on the level of professional education. **Methods.** Methods of analysis, mutually inverse mappings, analogy and opposites unity method. **Results.** The author of the article suggests new methods of creation the classes of elementarily functions based on differential and integral unity method, which allows applying more effective the features of elementarily functions for creation mathematical models and solving problems of applied nature. **Conclusions.** The integrated model of teaching mathematics gives an opportunity of the optimal choice of the mathematical education content subject to psychological and pedagogical features of the cognitive activity subjects and simplifying of the logical scheme perception of complex mathematical concepts according to the level of teaching mathematics.

Key words: integrated approach, integrated thinking, integrated model of teaching, triality, iteration, superimposition, additive inversion, category of elementarily functions.

For citation: Yarakhmedov G. A. Creation the Classes of Elementarily Functions in the Integrated Model of Teaching Mathematics at University. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2016. Vol. 10. No. 4. Pp. 126-131. (In Russian)

В настоящий период, названный информационным, в математической науке происходит осознание необходимости методологического обоснования в исследованиях логико- конструктивных схем (функционально-содержательных схем) на языке семиотики и возможности выбора правил и законов построения сложных объектов с помощью выделенных базисных элементов данной теории. Другими словами, любую профессиональную деятельность специалиста в математическом образовании целесообразно построить по следующей схеме, состоящей из уровней: онтологического, гносеологического, эпистемологического, семиотического, логико-конструктивного и методологического. В общем случае мы и будем придерживаться такого алгоритма действий в схеме деятельности, определяемой компонентами: субъект, язык, объект (или субъект, знание, среда).

Кроме того, в математическом образовании современного периода следует учитывать закономерности переходного периода (фазы транзитивности), в котором происходит смена доминирующей роли методов непрерывной математики на методы дискретной математики, а также интегральных методов этих разделов математики на основе методов синергетики. Совместное действие (синергизм) методов различных разделов математики и даже различных наук (интегральная концепция) становится доминирующим фактором в стратегии развития математики как науки и математического образования в целом. Актуальным в такой деятельности становится выбор методов и принципов формализации знаний об объектах системы. Именно в таком аспекте мы здесь будем рассматривать качественно иную схему построения классов элементарных функций и действий над ними на основе принципов комплексной модели обучения математике в вузе. Как известно из курса математического анализа, классы элементарных функций определяются целой и дробной рациональной функциями, степенной, показательной, логарифмической, тригонометрической функциями, а также функциями, которые из них получаются с помощью арифметических операций, обратных отображений и суперпозиций, последовательно примененных конечное число раз. Теоретико-методологическое обоснование принципов комплексного подхода в интегральной концепции математического образования в вузе проведено нами в монографии [5]. В такой модели, объединяющей физико-математическое, естественнонаучное и гуманитарное составляющие содержания образования, новые понятия и объекты строятся на основе закономерностей комплексного мышления, определяемого синтезом математического, диалектического и жизнедеятельностного компонентов мышления. В определенном смысле понятие комплексного мышления, определяемое нами, несколько отличается от понятия «комплексное мышление» в психологической науке (по Л. С. Выготскому), определяемого как мышление, промежуточное между синкретическим и понятийным мышлением. На комплексной модели обучения математике в вузе объединяются закономерности психологического развития личности (субъекта), закономерности языков представления знаний о природе (или о среде обитания субъекта) и закономерности взаимодействия личности с практикой применения полученных научных знаний в непосредственной жизнедеятельности. Кроме того, в комплексной модели обучения математике в вузе основными методологическими принципами считаются принципы единства противоположностей, аналогии, соответствия, определенности, симметрии, двойственности, инвариантности и математического моделирования, а общеметодологическим принципом является принцип тройственности (тринитарности) как интегральный признак целостности системы. Под тройственностью понимается признак целостности структуры, определяемый синтезом трех категориальных компонентов. Следует заметить, что тройственность становится интегральной характеристикой целостности различных структур и систем, и поэтому в исследованиях систем этот принцип становится доминирующим. Так, например, тройственность структуры свойственна математическому знанию (арифметическая, геометрическая и логическая составляющие) [1]. Основными компонентами познавательной деятельности субъективной реальности являются триалистическая физическая парадигма миропонимания (частицы, поля переносчиков взаимодействий, пространство – время) и триалистическая концепция мировоззрения, определяемая комплексом «разум (вера) – душа – материя» [2]. Мир информации также воспринимается как тринитарная модель Универсума [3]. Главное дидактическое отношение в современном образовательном процессе школы или вуза определяется как трехсубъектная система «учитель – содержание образования – ученик». Комплексная модель обучения на основе комплексного подхода изоморфна модели, объединяющей дискурсивно-аргументативную, эмотивно-суггестивную и исследовательскую модели обучения. Образовательная деятельность представляется трехкомпонентным комплексом «субъект – язык – объект» или «субъект – знание – среда». Набор фундаментальных образовательных объектов представляет собой взаимосвязанную систему категорий, и они выступают в качестве генерализирующих элементов содержания образования [4].

Исходя из вышеизложенного, ставится цель. На первом этапе выявляются базовые функции (онтологический уровень), изучаются их основные свойства (гносеологический уровень) и возможности построения новых функций (эпистемологический уровень), выделяются основные способы формализации знаний (семиотический уровень) и логических схем обобщения понятий (логико-конструктивный уровень). Классы функций исследуются на основе методологических принципов комплексного подхода. Цель второго этапа изучения предмета заключается в воспроизведении таблиц дифференцирования и интегрирования базовых функций и их обратных функций, способствующих получению оптимального результата деятельности. На третьем этапе ставится цель: применить основные операции и принципы комплексного подхода к элементарным функциям для построения модели определенной задачи и ее анализа с точки зрения целесообразности применения математической модели в практике.

Для достижения поставленной цели, классы элементарных функций и структуру функционально-технической логической схемы познавательной деятельности мы построим следующим образом.

Считаем, что структура такой схемы состоит из:

1) базовых функций $y = x,\ y = a^x,\ \ y = sinx$;
2) арифметических операций, правил и законов взаимодействия объектов структуры (системы);
3) основных методологических принципов комплексного подхода к обучению математике;
4) основных способов действия: итерации, суперпозиции и дополнения.

Итак, следуя предложенной схеме, итерацией по умножению базовой функции $\mathrm{y = x}$, получим функции $\mathrm{y = x \cdot x = x^2}$, $\mathrm{y = x \cdot x \cdot x = x^3, \dots, y = x^n}$; итерацией этих функций по сложению получим функции $\mathrm{y = a_0}$, $\mathrm{y = a_1 x}$, $\mathrm{y = a_2 x^2, \dots, y = a_n x^n}$. Объединяя эти действия, получим класс целых рациональных функций. Отношением двух таких функций представляется дробная рациональная функция, определенная для всех значений x, кроме тех, которые обращают знаменатель в ноль.

Соответственно, суперпозицией определяются более сложные функции из функций полученных классов (принцип соответствия и определенности). Аналогично, итерацией по умножению, сложению и суперпозицией определяются классы функций для базовых функций $y = a^x$ и$y = sinx$ (принцип аналогии). Так, например, объединение действий итерации и суперпозиции для базовой функции $y = sinx$ определяют функции вида $A_n \sin(nx + \alpha_n)$, сумма которых, при определенных условиях, представляет класс функций, для которых существуют ряды Фурье.

Полагаем, что действие дополнения дает возможность определения для данной функции новой функции на основе их фундаментальной определенности (принцип двойственности) с помощью некоторого тождества. Так, например, функция $cosx$ определяется с помощью $sinx$ из соответствующего тригонометрического тождества $sin^2x + cos^2x = 1$ как $y = \pm\sqrt{1 - sin^2x}$ (косинус, на самом деле, переводится как дополнение к синусу). Более того, понятие дополнения является одним из основополагающих понятий не только математики, но и смежных с ней наук. Например, такие действия как дополнение множества в теории множеств, дополнение события в теории вероятностей, дополнительные углы в геометрии, дополнительная область в топологии, алгебраическое дополнение, дополнительный минор, структура с дополнением в алгебре, дуальность в физике, дипольное взаимодействие в химии и биологии выражают целостность исследуемых структур. Кроме того, понятие дополнения тесно связано с другим основным понятием математики – полноты (полная система, полная аналитическая функция, полная корреляционная матрица, полная группа, полная индукция, полное кольцо, полное пространство, пополнение и т. д.). Остальные тригонометрические функции определяются различными арифметическими операциями с помощью $sinx$ и $\sqrt{1 - sin^2x} = cosx$.

Для базовых функций определим обратные функции. Для функции $y = f(x)$ обратную функцию обозначим через f^{-1}, а пересечение их областей однозначности обозначим через $E = Д_1 \cap Д_2$. Многозначные обратные функции определяются при некоторых дополнительных условиях. В функции $y = x^n$, поменяя местами переменные x, y (принцип симметрии), получим $x = y^n$, или в области однозначности E имеем $x = \left(x^{1/n}\right)^n$, т. е. обратная функция для степенной функции определяется как $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$.

Аналогично, для функции $y = a^x$ и $y = sinx$ соответственно имеем (принцип аналогии и соответствия): $x = a^y$, или $x = a^{\log_a x}$, т. е. $y = \log_a x$; $x = siny$, или $x = \sin(arcsinx)$ т. е. $y = arcsinx$. Далее, итерацией и суперпозицией определяются соответствующие классы функций.

Для определения производной элементарных функций примем следующие соглашения:

1) считаем, что производные базовых функций уже определены;
2) установлены правила вычисления производных сложных функций, произведения и суммы (разности) функций;
3) в областях однозначности существуют производные обратных функций.

Итак, для базовых функций имеем: $y' = 1$, $y' = nx^{n-1}$,$y' = (a^x)' = a^x \cdot lna$, $y' = cosx$. Если определены функции $y = f(x), x = x(t)$ и существуют производные y'_x, x'_t, то существует и производная $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Или в дифференциалах выполняется равенство $dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_t dx$. Последнее означает, что для сложных функций форма дифференциала не меняется, т. е. является инвариантом (принцип инвариантности). Для непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$,$g(x)$ имеют место равенства:

1) $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$;
2) $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Для базовых функций в области однозначности имеем тождества:

$$x = \left(x^{1/n}\right)^n, \quad (1)$$

$$x = a^{\log_a x}, \quad (2)$$

$$x = \sin(arcsinx). \quad (3)$$

Так как каждая из функций $arcsinx$ и $arccosx$, $arctgx$ и $arcctgx$ взаимно дополняют другую до $\frac{\pi}{2}$, то для их главных значений выполняются соотношения:

$$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Найдем производные обратных функций для базовых функций. В соответствии с установленными правилами, дифференцируя равенство (1), получим

$$1 = n \cdot \left(x^{1/n}\right)^{n-1} \cdot \left(x^{1/n}\right)'.$$

Отсюда $\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{\left(x^{1/n}\right)^{n-1} \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot x^{1/n - 1}$. (6)

Дифференцируя равенство (2), имеем $1 = \left(a^{\log_a x}\right) \cdot lna \cdot (\log_a x)'$. Отсюда

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$. (7)

Из основного тригонометрического тождества $sin^2(arcsinx) + cos^2(arcsinx) = 1$ имеем $cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2}$. Тогда, дифференцируя тождество (3), получим

$1 = cos(arcsinx) \cdot (arcsinx)'$. Отсюда

$(arcsinx)' = \frac{1}{\cos(arcsinx)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (8)

Аналогичным образом, дифференцируя равенство $x = \cos(arccosx)$, получим

$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(9)

Для функции $tgx = \frac{sinx}{cosx}$, по правилу дифференцирования произведения функций, имеем

$(tgx)' = \left(sinx \cdot \frac{1}{cosx}\right)' = cosx \cdot \frac{1}{cosx} + \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$. (10)

Аналогично,

$(ctgx)' = \left(cosx \cdot \frac{1}{sinx}\right)' = -\frac{1}{sin^2 x}$. (11)

Дифференцируя равенство $x = tg(arctgx)$, с учетом равенства $cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$, получим $1 = \frac{1}{cos^2(arctgx)} \cdot (arctgx)'$. Отсюда

$(arctgx)' = cos^2 x(arctgx) = \frac{1}{1+tg^2(arctgx)} = \frac{1}{1+x^2}$. (12)

Аналогично,

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$. (13)

Производные базовых функций и их обратных функций, определяемых равенствами (6)-(13), в дифференциалах имеют вид: $dy = 0$, $dy = nx^{n-1}dx$, $dy = a^x \cdot lna \cdot dx$, $dy = cosxdx$, $dy = \frac{dx}{x \cdot lna}$, $d(arcsinx) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $d(arccosx) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $d(ctgx) = -\frac{dx}{sin^2 x}$,

$d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$, $d(arcctgx) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Если учесть, что $dy = d(y + c)$ и операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратные, то стоящие рядом символы этих операций «уничтожают» друг друга. При этом получим значения интегралов для перечисленных выше элементарных функций. Так, например, для функции $y = x^n$ имеем $dy = nx^{n-1}dx$. Интегрируя это равенство, получим $\int x^{n-1}dx = \frac{y}{n} + c = \frac{x^n}{n} + c$.

Для функции $y = a^x$, $dy = a^x lnadx$ и, соответственно, получим $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$. Применяя эту процедуру к равенствам (7)-(13), получим соответствующие табличные интегралы и, тем самым, имеем и таблицу производных, и таблицу интегралов для основных элементарных функций.

Такой подход к определению элементарных функций и вычислению их производных и интегралов актуален и в обобщениях. Например, как известно из курса анализа, функции $\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, $a, b > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, $a > 0$, определенные эйлеровыми интегралами первого и второго рода, после элементарных функций, играют важную роль в анализе и приложениях. В частности, функция $\Gamma(a)$ является естественным распространением на область любых положительных значений аргумента факториала $n!$, определяемого лишь для натуральных значений n. Легко заметить, что эти функции определяются интегралами произведения базовых функций, причем для функции $B(a,b)$ основания базовых функций взаимно дополняют до 1. Если же учесть связь этих функций равенством $B(a,b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ и формулу дополнения, положив $b = 1 - a$ при$0 < a < 1$, то получим равенство $\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sina\pi}$, в котором содержится базовая функция предлагаемой нами логической схемы. Отсюда следует, что и $\mathrm{B}(a, 1-a) = \frac{\pi}{sina\pi}$.

Отметим также, что итерацией и суперпозицией базовых функций, дифференцированием их различных степеней строятся полиномы, определяющие на заданном отрезке ортогональные системы, играющие важную роль в теории приближения функций. Так, например, полиномы Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^x(x^2-1)^n}{dx^n}, n = 1,2,\ldots$, полиномы Лагерра $L_n(x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n(e^{-x}\cdot x^{n+\alpha})}{dx^n}$ и полиномы Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ образуют на соответствующих отрезках с определенными «весами» ортогональные системы.

Итак, предлагаемая нами схема построения классов элементарных функций на основе методологических принципов комплексного подхода, выделенных базовых функций и способов действия, дает возможность разрешить проблему оптимального выбора содержания изучаемого материала и его структурирования с учетом психолого-педагогических особенностей субъектов деятельности на различных уровнях профессионального образования. Такой подход к обучению математике эффективен не только в сторону обобщения классов функций и исследования их свойств в теоретическом плане, но и упрощения логических схем для определения сложных математических понятий в основном и среднем (полном) общем, а также в профессиональном образовании с точки зрения реализации на практике полученных математических знаний.

Литература

1. Арепьев Е. И. Домножественная реалистическая интерпретация онто-гносеологических основ математики // Вопросы философии. 2010. № 7. С. 84.
2. Владимиров Ю. С. Метафизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 514 с.
3. Меськов В. С., Мамченко А. А. Мир информации как тринитарная модель Универсума. Постнеклассическая методология когнитивной деятельности // Вопросы философии. 2010. № 5. С. 58.
4. Перминова Л. М. От классических к постнеклассическим представлениям в дидактике и обучении // Педагогика. 2009. № 8. С. 7-14.
5. Ярахмедов Г. А. Комплексный подход к математическому образованию в педагогическом вузе: теория и методология. Махачкала: АЛЕФ, 2013. 340 с.
6. Ярахмедов Г. А. Тринитарность как интегральный признак целостности системы в новой образовательной парадигме // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. 2014. № 1. С. 42-49.

References

1. Arefiev E. I. Undermultiplex realistic interpretation of onto-epistemological foundations of mathematics. *Voprosy filosofii* [Philosophy Questions]. 2010. No. 7. Pp. 84. (In Russian)
2. Vladimirov Yu. S. *Metafizika* [Metaphysics]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znanii Publ. 2009. 514 p. (In Russian)
3. Meskov V. S., Mamchenko A. A. The world of information as a trinitarian model of the Universe. Postnonclassical methodology of cognitive activities. *Voprosy filosofii* [Philosophy Questions]. 2010. No. 5. P. 58. (In Russian)
4. Perminova L. M. From classical to post-non-classical concepts in didactics and training. *Pedagogika* [Pedagogy]. 2009. No. 8. Pp. 7-14. (In Russian)
5. Yarakhmedov G. A. *Kompleksnyy podkhod k matematichskomu obrazovaniyu v pedagogicheskom vuze: teoriya i metodologiya* [An integrated approach to mathematical education at Pedagogical university: theory and methodology]. Makhachkala: ALEPH, 2013. 340 p. (In Russian)
6. Yarakhmedov G. A. Trinitrate as an intergrated creation of system completeness in new educational paradigm. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Pedagogicheskie nauki* [Proceedings of Southern Federal University. Pedagogical Sciences]. 2014. No. 1. Pp. 42-49.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ
Принадлежность к организации

Ярахмедов Гаджиахмед Абдулганиевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии, факультет математики, физики и информатики, Дагестанский государственный педагогический

INFORMATION ABOUT AUTHOR
Affiliations

Gadzhiakhmed A. Yarakhmedov, Ph. D. (Physics and Maths), professor, the chair of Algebra and Geometry, faculty of Mathematics, Physics and Computer Science, Dagestan State Pedagogical University (DSPU), Makhachkala, Russia, e-mail: yari.85@mail.ru.

университет (ДГПУ), Махачкала, Россия; e-mail:
yari.85@mail.ru

Received 24.09.2016.

Принята в печать 24.09.2016 г.