математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: Vaksham1960@mail.ru

Пайзулаева Райганат Кайтмазовна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра методики преподавания математики и информатики, институт физико-математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: hfz-1955@mail.ru

Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: Vaksham1960@mail.ru

Raiganat K. Paizulaeva, Ph. D. (Pedagogy), assistant professor, the chair of Teaching Methods of Mathematics and Computer Science, Institute of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: hfz-1955@mail.ru

Принята в печать 15.11.2024 г.

Received 15.11.2024.

Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Article
УДК 37
DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-4-20-25

Решение некоторых типов неопределенных (диофантовых) уравнений и их систем

© 2024 Вакилов Ш. М., Бакмаев Ш. А., Лахикова З. Г.
Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: vaksham@mail.ru; bakmayev53@mail.ru; hfz-1955@mail.ru

РЕЗЮМЕ. Целью работы является поиск методов решения неопределенных уравнений и их систем в натуральных и целых числах с помощью формул тождественных преобразований и их использования при организации внеклассной работы по математике. **Методы.** Изучение научно-методической литературы, посвященной теории чисел по решению неопределенных уравнений в целых числах с помощью формул тождественных преобразований. **Результаты.** Определены некоторые методы решения неопределенных уравнений и их систем в натуральных и целых числах с помощью формул тождественных преобразований. **Вывод.** Показана возможность разложения на множители суммы и разности двух выражений с разными показателями и ее использование при решении неопределенных уравнений и их систем.

Ключевые слова: решение уравнения в натуральных и целых числах, неопределенное уравнение, системы неопределенных уравнений, тождество, тождественное преобразование, формулы тождественных преобразований, диофантовые уравнения, историческая справка.

Формат цитирования: Вакилов Ш. М., Бакмаев Ш. А., Лахикова З. Г. Решение некоторых типов неопределенных (диофантовых) уравнений и их систем // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2024. Т. 18. № 4. С. 20-25. DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-4-20-25

Solution of Some Types of Undetermined (Diophantine) Equations and Their Systems

© 2024 Shamil M. Vakilov, Shirvani A. Bakmaev, Zuhra G. Lakhikova
Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: vaksham@mail.ru; bakmayev53@mail.ru; hfz-1955@mail.ru

ABSTRACT. The aim of the paper is to search for methods for solving undeterminate equations and their systems in natural and integer numbers using formulas of identical transformations and their use in organizing extracurricular work in mathematics. **Methods**. Studying scientific and methodological literature on number theory for solving indefinite equations in integers using formulas for identity transformations. **Results.** Some methods for solving indefinite equations and their systems in natural and integer numbers using formulas of identity transformations are defined. **Conclusion**. The possibility of factoring the sum and difference of two expressions with different exponents and its use in solving indeterminate equations and their systems is shown.

Keywords: solving equations in natural and integer numbers, indefinite equations, systems of indefinite equations, identity, identity transformation, formulas for identity transformations, Diophantine equations, historical background.

For citation: Vakilov Sh. M. Bakmaev Sh. A., Lakhikova Z. G. Solution of Some Types of Undetermined (Diophantine) Equations and Their Systems. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2024. Vol. 18. No. 4. Pp. 20-25. DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-4-20-25 (in Russian)

Введение

Диофантовые уравнения (их еще называют неопределенными уравнениями) – алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, у которых разыскиваются целые решения. Диофант Александрийский изобрел большое число способов решения подобных уравнений, поэтому их называют диофантовыми. Его основной целью было дать метод нахождения решения. Он не ставил себе задачу нахождения всех решений уравнения, даже тогда, когда их множество, и вполне удовлетворялся отысканием одного решения. [2]

Наиболее ранние сведения о применении неопределенных уравнений в индийской математике появилось в 1тысячелетии до н. э. в «Шульбе-сутре». При преобразовании квадрата площадью a^2 в квадрат площадью na^2 приходилось решать неопределенное уравнение второй степени $x^2 + y^2 = z^2$, решение которого дается в виде $(m^2, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2})$. При расчетах алтарей решались системы неопределенных уравнений первой степени, например, такое:

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ \frac{x}{m^2}+\frac{y}{n^2}=1. \end{cases}$$

Хотя метод решения не отмечен, комментатор дает правильное решение, а именно, $m=6$, $n=4$ для $x=9$, $y=12$ и затем $m=3$, $n=6$ для $x=5$, $y=16$ [1].

Однако систематически неопределенные уравнения стали объектом изучения лишь в первом веке новой эры, когда индийские математики и астрономы столкнулись с рядом календарно-астрономических задач. В этих задачах необходимо было узнать, через какой промежуток времени небесные тела, имеющие различные периоды обращения, займут то же самое относительное положение. Эти задачи сводятся к отысканию целых чисел, дающих при делении числа N на данные числа a, c известные остатки p и q.

Таким образом, мы имеем $N=ax+p=by+q$, приняв $\pm b=p-q$, получим $ax\pm b=cy$. Знаки перед свободным членом зависят от величины чисел p и q.

Другая задача, которая приводила к неопределенному уравнению первой степени, была такая: необходимо найти такое число $\boldsymbol{x}$, произведение которого с данным числом $\boldsymbol{a}$, увеличенное или уменьшенное на другое неизвестное число, могло бы делиться без остатка на данное число $\boldsymbol{c}$.

Иначе говоря, надо было найти в целых положительных числах решения выражения $\frac{ax\pm b}{c} = y$.

Позднее индийские математики стали просто решать уравнения $ax \pm b = cy$. Первым математиком, давшим решение неопределенного уравнения первой степени в целых положительных числах, был Ариабхата, им рассматривалось уравнение $ax+в=cy$. Бхаскара I показал, что методом Ариабхаты можно решить и уравнение $ax-в=cy$ и что решение этого уравнения следует из уравнения $ax-1=cy$. Рахмагупта и другие индийские ученые несколько упростили этот метод решения, а Ариабхаа II улучшил их методы. Индийские ученые понимали, а многие из них и отмечали, что эти уравнения могут быть разрешимы только в тех случаях, если числа (a, c) взаимно просты. Если же они имеют общий делитель, то на него должен делиться и свободный член b, иначе уравнение лишено смысла.

Шрипати указывает: «Делимое, делитель и свободный член следует разделить на их множитель, если таковой имеется, затем возможно применять описанный метод. Если делимое и делитель имеют общий множитель, на который не делится свободный член, то проблема абсурдна». Свое правило Ариабхата приводит для решения такой проблемы: найти число N, которое, будучи разделено на данные числа a, c, дает два известных остатка p, q. Эта задача приводит к следующим неопределенным уравнениям первой степени:

$ax + b = cy$, если $p > q$; $ax - b = cy$, если $p < q$ [2].

Аналогичные примеры и задачи приводятся в работах большинства индийских ученых.

Подобные задачи имеются в работах китайских математиков. Так, в «Математическом трактате» Сунь-цзы, написанном в III и IVвв., приводится ряд теоретико-числовых задач на остатки.

Большое значение для развития науки имели исследования греческого ученого Диофанта, который приводил только рациональные решения. Диофант написал большой труд под общим названием «Арифметика». «Арифметика» содержала всего13 книг, но до нас дошли только 6, притом с большими пропусками. Диофант много занимался различного рода уравнениями, но более всего известен созданием остроумных способов решения неопределенных уравнений. ***Алгебраическое уравнение с одним или несколькими неизвестными, все коэффициенты которого – целые числа, а решения отыскиваются во множестве целых чисел, называют Диофантовыми уравнениями.***

Теория диофантовых уравнений впоследствии получила очень большое развитие. В XVI-XVIII вв. французский ученый Баше создал общий способ решения диофантовых уравнений первой степени.

Отечественный математик Б. Н. Делоне создал интересный метод исследования неопределенных уравнений определенного вида, позволяющий определять границы числа решений.

Цель статьи – поиск методов решения неопределенных уравнений и их систем в натуральных и целых числах с помощью формул тождественных преобразований и их использования при организации внеклассной работы по математике.

В процессе исследования были использованы **методы:** изучение научно-методической литературы, посвященной теории чисел по решению неопределенных уравнений в целых числах с помощью формул тождественных преобразований.

Результаты и обсуждение

Решение неопределенных уравнений и их систем

Всем известны формулы разложения суммы и разности некоторых степеней.

Например: $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$;

$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

Эти формулы являются частными случаями делимости двучленов $x^m \pm a^m$ на двучлен $x \pm a$. Разность одинаковых степеней двух выражений мы всегда можем по этим формулам разложить, так как разность степеней всегда делится на $a - b$.

Вообще $x^m - a^m = (x+a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \cdots x^{m-1})$ (знаки плюс и минус чередуются). Сумму одинаковых четных степеней двух выражений мы не можем разложить, так как $a^m + b^m$ (m-четное) не делится ни на разность, ни на сумму этих выражений.

Возникает вопрос, как же разложить сумму и разность двух выражений с разными показателями степеней?

Исследуя сумму и разности двух выражений с разными показателями степеней, мы пришли к следующим тождествам:

1) $a^m + b^n = (a+b)(a^{m-1} + b^{n-1}) - ab(a^{m-2} + b^{n-2})$

2) $a^m + b^n = (a-b)(a^{m-1} - b^{n-1}) + ab(a^{m-2} + b^{n-2})$

3) $a^m - b^n = (a+b)(a^{m-1} - b^{n-1}) - ab(a^{m-2} - b^{n-2})$

4) $a^m - b^n = (a+b)(a^{m-1} + b^{n-1}) + ab(a^{m-2} - b^{n-2})$

Эти тождества легко доказываются.

Докажем первое тождество.

1) $a^m + b^n = (a+b)(a^{m-1} + b^{n-1}) - ab(a^{m-2} + b^{n-2}) = a^m + ab^{n-1} + a^{m-1}b + b^n - a^{m-1}b - ab^{n-1} = a^m + b^n$

Исследуя суммы и разности степеней, мы обнаружили, что их можно разложить не только $a \pm b$ и ab, но и через $a^{R_1} \pm b^{R_2}$ и $a^{R_1}b^{R_2}$, где R_1 и R_2 некоторые числа. В этом случае наши тождества будут выглядеть следующим образом:

1¹) $a^m + b^n = (a^{R_1} + b^{R_2})(a^{m-R_1} + b^{n-R_2}) - a^{R_1}b^{R_2}(a^{m-2R_1} + b^{n-2R_2})$

2¹) $a^m + b^n = (a^{R_1} - b^{R_2})(a^{m-R_1} - b^{n-R_2}) + a^{R_1}b^{R_2}(a^{m-2R_1} + b^{n-2R_2})$

3¹) $a^m - b^n = (a^{R_1} + b^{R_2})(a^{m-R_1} - b^{n-R_2}) - a^{R_1}b^{R_2}(a^{m-2R_1} - b^{n-2R_2})$

4¹) $a^m - b^n = (a^{R_1} - b^{R_2})(a^{m-R_1} + b^{n-R_2}) + a^{R_1}b^{R_2}(a^{m-2R_1} - b^{n-2R_2})$

Докажем второе тождество. Раскрывая скобки в правой части, получим.

2¹) $a^m + b^n = (a^{R_1} - b^{R_2})(a^{m-R_1} - b^{n-R_2}) + a^{R_1}b^{R_2}(a^{m-2R_1} + b^{n-2R_2})=$

$=a^m + a^{R_1}b^{n-R_1} + b^{R_2}a^{m-R_1} + b^n - a^{R_1}b^{n-R_1} - b^{R_2}a^{m-R_1}=a^m + b^n$ [3].

Используя эти тождества, можно решить некоторые неопределенные уравнения и их системы.

Пример 1. Решить уравнение.

$$a^5 + b^4 - 34a^3 - 34b^2 + 225a + 225 = 0.$$

Решение. Заметим, что $a = -1; b = \pm 1$ решение уравнения. Найдем другие решения.

Согласно тождеству

1¹) $a^m + b^n = (a^{R_1} + b^{R_2})(a^{m-R_1} + b^{n-R_2}) - a^{R_1}b^{R_2}(a^{m-2R_1} + b^{n-2R_2})$ имеем $a^5 + b^4 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^2) - a^2b^2(a + b^0)$, откуда получим

$a^5 + b^4 - (a^2 + b^2)a^3 - (a^2 + b^2)b^2 + a^2b^2a + a^2b^2 = 0$. Отсюда следует, что $\begin{cases} a^2 + b^2 = 34 \\ a^2b^2 = 225 \end{cases} \to \begin{cases} a^2 = 34 - b^2 \\ a^2b^2 = 225 \end{cases}$ $(34 - b^2)b^2 - 225 = 0$;

Обозначив получим $b^4 - 34b^2 + 225 = 0$, откуда $b_1^2 = 9$; $b_2^2 = 25$, т. е.

$b_1 = \pm 3$; $a_1 = \pm 5$; $b_2 = \pm 5$; $a_2 = \pm 3$.

Ответ: 1) если a=± 3; то $b = \pm 5$; если a=± 5, то $b = \pm 3$;

2) если $a = -1$, то $b = \pm 1$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} a^m+b^n=305 \\ ab=28 \\ a^{m-1}+b^{n-1}=71 \\ a^{m-2}+b^{n-2}=17. \end{cases}$ $(\not\equiv)$

1) Из тождества 1) $a^m + b^n = (a + b)(a^{m-1} + b^{n-1}) - ab(a^{m-2} + b^{n-2})$ имеем $(a + b)(a^{m-1} + b^{n-1}) = a^m + b^n + ab(a^{m-2} + b^{n-2})$, откуда с учетом нашей системы уравнений получим:

$(a + b) \cdot 71 = 305 + 28 \cdot 17 = 781$, откуда $a + b = 11$.

Тогда получим систему уравнений $\begin{cases} ab = 28 \\ a + b = 11. \end{cases}$

Из этой системы находим: $\begin{cases} a = 4, \\ b = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 7, \\ b = 4. \end{cases}$ $(\not\equiv\not\equiv)$

Из формулы 1) $a^m + b^n = (a + b)(a^{m-1} + b^{n-1}) - ab(a^{m-2} + b^{n-2})$ найдем $a^{m-1} - b^{n-1} = \frac{a^m+b^n-ab(a^{m-2}+b^{n-2})}{a-b}$.

Так как $a - b = \pm 3$, то имеем два случая:

Рассмотрим первый случай

Пусть $\boldsymbol{a - b = -3}$ тогда, $a^{m-1} - b^{n-1} = \frac{305-476}{-3} = 57$.

Откуда с учетом системы $(\not\equiv)$ имеем: $\begin{cases} a^{m-1} + b^{n-1} = 71 \\ a^{m-1} - b^{n-1} = 57 \end{cases}$ $(\not\equiv\not\equiv\not\equiv)$ откуда, складывая первое уравнение со вторым, получим $2a^{m-1} = 128$, откуда получим $a^{m-1} = 4^3$.

Из $(\not\equiv\not\equiv)$ следует, что:

1) $a = 4$, то $4^{m-1} = 4^3$; $m - 1 = 3$; $m = 4$.

2) $a = 7$, то $7^{m-1} = 4^3$; $(m - 1)lq7 = lq64$; $m - 1 = \frac{lq64}{lq7}$;

$m = \frac{lq64}{lq7} + lq10$ – это не натуральное число.

Найдем b. Вычитывая из первого уравнения второе из системы $(\not\equiv\not\equiv\not\equiv)$, имеем $2b^{n-1} = 14$; $b^{n-1} = 7$.

Из $(\not\equiv\not\equiv)$ следует, что:

1) $b = 7$, то $7^{n-1} = 7$; $n-1 = 1$; $n = 2$.

2) b= 4, то $4^{n-1} = 7$; $(n - 1)lq4 = lq7$; $n = \frac{lq7}{lq4} + lq10$;

$n = \frac{lq7}{lq4} + lq10$ – это не натуральное число.

Рассмотрим второй случай

Пусть $\boldsymbol{a - b = 3}$. Откуда с учетом системы $(\not\equiv)$ имеем

$\begin{cases} a^{m-1} + b^{n-1} = 71 \\ a^{m-1} - b^{n-1} = -57 \end{cases}$ $(\not\equiv\not\equiv\not\equiv\not\equiv)$ откуда складывая первую уравнение со вторым получим $2a^{m-1} = 14$, откуда получим $a^{m-1} = 7$.

Из $(\not\equiv\not\equiv)$ следует, что:

1) $a = 4$, то $4^{m-1} = 7$; $m = \frac{lq7}{lq4} + lq10 -$ не натуральное число.

2) $a = 7$, то $7^{m-1} = 7$; $m - 1 = 1$; $m = 2$;

Найдем b. Вычитывая из первого уравнения вторую, из системы (≢≢≢), имеем $2b^{n-1} = 128$; $b^{n-1} = 64$.

Из (≢≢) следует, что:

1) $b = 7$, *то* $7^{n-1} = 64$; $n = \frac{lq=64}{lq7} + lq10 -$ не натуральное число.

2) $b = 4$, *то* $4^{n-1} = 64$; $n - 1 = 3, n = 4$.

Ответ: 1) $a = 4; b = 7; m = 4; n = 2$;

2) $a = 7; b = 7; m = 2; n = 4$.

Решите самостоятельно.

1. Решите уравнения:

1.1 $a^5 + b^6 - 25a^3 - 25b^2 + 144a + 144b^4 = 0$

1.2 $a^{10} - b^7 - 260a^6 - 260b^5 + 1024a^2 - 144b^3 = 0$

2. Решить систему уравнений:

2.1. $\begin{cases} a^m + b^n = 206 \\ a - b = 2 \\ a^{m-1} + b^{n-1} = 52 \\ a^{m-2} + b^{n-2} = 14. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} a^m + b^n = 661 \\ ab = 30 \\ a^{m-1} + b^{n-1} = 131 \\ a^{m-2} + b^{n-2} = 26. \end{cases}$

Выводы

Проведенное нами исследование методов решения неопределенных уравнений и их систем в натуральных и целых числах с помощью формул тождественных преобразований позволяет нам сделать следующие выводы: ученые Индии первые предложили общий метод для решения в целых числах неопределенных уравнений первой степени с целыми коэффициентами; диофантовы уравнения относятся к ряду задач, не требующих работы со сложными и громоздкими формулами. При их решении необходимо лишь проводить аккуратные рассуждения с использованием определенных понятий теории чисел и связанные в стройную логическую конструкцию; Диофантовы уравнения и их решения и по сей день остаются актуальной темой; умение решать такие уравнения позволяет найти остроумные и сравнительно простые решения, казалось бы, «неразрешимых» задач; показана возможность разложения на множители суммы и разности двух выражений с разными показателями и ее использование при решении неопределенных уравнений и их систем.

Метод решения некоторых типов диофантовых уравнений с помощью формул тождественных преобразований может быть использован при проведении внеклассной работы по математике в общеобразовательной школе.

Литература

1. Бухштаб А. А. Теория чисел: учебное пособие. Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР. М.: 1960. 96 с.

2. Володарский А. И. Очерки истории средневековой индийской математики. М.: Наука, 1977. 184 с.

3. Мамедяров Д. М. Некоторые свойства соединений и фигурных чисел и их применение при решении задач. Дербент, 2006. 229 с.

4. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. М.: Наука, 2007. 200 с.

5. Кордемский Б. А. Удивительный мир чисел, математические головоломки и задачи для любознательных: учебное пособие, 1996. 236 с.

References

1. Bukhshtab A. A. *Teoriya chisel* [Number theory]. Textbook/State educational and pedagogical publishing house of the Ministry of Education of the RSFSR. Mosco: 1960. 96 p. (In Russian)

2. Volodarsky A. I. *Ocherki istorii srednevekovoj indijskoj matematiki* [Essays on the history of medieval Indian mathematics]. Moscow, Nauka publ., 1977. 184 p. (In Russian)

3. Mamedyarov D. M. *Nekotorye svojstva soedinenij i figurnykh chisel i ikh primenenie pri reshenii zadach* [Some properties of compounds and figured numbers and their application in solving problems]. Derbent, 2006. 229 p. (In Russian)

4. Perelman Ya. I. *Zanimatel'naya algebra* [Entertaining algebra]. Moscow: Science, 2007. 200 p. (In Russian)

5. Kordemsky B. A. *Udivitel'nyj mir chisel, matematicheskie golovolomki i zadachi dlya lyuboznatel'nykh* [The wonderful world of numbers, mathematical puzzles and problems for the curious]. Textbook, 1996. 236 p. (In Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
Принадлежать к организации

Вакилов Шамиль Магомедович, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой методики преподавания математики и информатики, институт физико-математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: Vaksham1960@mail.ru

Бакмаев Ширвани Абдуллатипович, кандидат педагогических наук, профессор, кафедра методики преподавания математики и информатики, институт физико-математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: vaksham@mail.ru

Лахикова Зухра Гаджиевна, старший преподаватель, кафедра методики преподавания математики и информатики, институт физико-математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: hfz-1955@mail.ru

Принята в печать 14.11.2024 г.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS
Affiliations

Shamil M. Vakilov, Ph. D. (Pedagogy), assistant professor, the chair of Teaching Methods Mathematics and Computer Science, Institute of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: Vaksham1960@mail.ru

Shirvani A. Bakmaev, Ph. D. (Pedagogy), professor, the chair of Teaching Methods Mathematics and Computer Science, Institute of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: vaksham@mail.ru

Zuhra G. Lakhikova, senior lecturer, the chair of Mathematics and Computer Science Teaching Methods, Institute of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: hfz-1955@mail.ru

Received 14.11.2024.