Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Paper
УДК 37.520.88
DOI: 10.31161/1995-0659-2025-19-2-12-18

Методические аспекты изучения темы «Приближенное решение уравнений» дисциплины «Численные методы»

©2025 Агаханов С. А.[1], Баламирзоев А. Г.[1, 2], Рагимханова Г. С.[1]
[1] Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: selimkhan.agakhanov@mail.ru, gulnara_6789@mail.ru
[2] Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Махачкалинский филиал,
Махачкала, Россия; e-mail: abdul2000@yandex.ru

РЕЗЮМЕ. Целью статьи является разработка методических аспектов изучения дисциплины «Численные методы» будущими бакалаврами по профилям «Математика» и «Информатика», умение выбора соответствующего численного метода решения задачи и составление программ на языке программирования. **Методы.** Составление программ на языке Pascal для решения уравнений методом касательных и хорд. Каждый из описываемых методов включает в себя пример решения определенной задачи с применением программы, написанной на языке PascalABC. Для каждого метода также представляется блок-схема, иллюстрирующая его алгоритм. **Результаты**. Для оценки скорости сходимости были разработаны программы на языке PascalABC, которые решают уравнения с помощью методов касательных и хорд. В качестве инициативы предлагается авторский метод внедрения темы «Приближенное решение уравнений», основанный на методах касательных и хорд в курсе «Численные методы». **Выводы.** В работе использован пакеты прикладных программ для построения графиков функций, продемонстрирован блок-схема для графического изображения алгоритма приближенного решения нелинейных уравнений методом касательных и хорд. Разработаны соответствующие программы для приближенного решения нелинейных уравнений, которые находят приближенные корни уравнения и дают возможность для сравнения скорости сходимости при различных вариациях метода касательных и хорд.

Ключевые слова: уравнения, программа, скорость сходимости, численные методы.

Формат цитирования: Агаханов С. А., Баламирзоев А. Г., Рагимханова Г. С. Методические аспекты изучения темы «Приближенное решение уравнений» дисциплины «Численные методы» // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2025. Т. 19. № 2. С. 12-18. DOI: 10.31161/1995-0659-2025-19-2-12-18

Methodological Aspects of Studying the Topic "Approximate Solution of Equations" of the Discipline "Numerical Methods"

©2025 Selimhan A. Agahanov[1], Abdul G. Balamirzoev[1, 2], Gyulnara S. Ragimkhanova[1]
[1] Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: selimkhan.agakhanov@mail.ru, gulnara_6789@mail.ru
[2] Moscow Automobile and Road State Technical University, Makhachkala Branch,
Makhachkala, Russia; e-mail: abdul2000@yandex.ru

ABSTRACT. The **aim** of the paper is to develop methodological aspects of studying the discipline "Numerical Methods" by future bachelors in the fields of "Mathematics" and "Computer Science", the ability to choose the appropriate numerical method for solving a problem and create a program in a programming language. **Methods.** Programming in Pascal for solving equations by the method of tangents and chords. Each of the described methods includes an example of solving a specific problem using a program written in the PascalABC language. A flowchart illustrating its algorithm is also provided for each method. **Results.** To establish the convergence rate, Pascal ABC programs have been developed for solving equations by the method of tangents and chords. The author's approach to the introduction of the section "Approximate solution of equations" using tangent and chord methods in the course "Numerical Methods" is proposed. **Conclusions.** The paper uses application software packages for plotting functions, demonstrates a flowchart for graphical representation of an algorithm for approximate solution of nonlinear equations by the method of tangents and chords. Appropriate programs have been developed for the approximate solution of nonlinear equations, which find approximate roots of the equation and make it possible to compare the rate of convergence with various variations of the tangent and chord method.

Keywords: equations, program, convergence rate, numerical methods.

For citation: Agahanov S. A., Balamirzoev A. G., Ragimkhanova G. S. Methodological Aspects of Studying the Topic "Approximate Solution of Equations" of the Discipline "Numerical Methods". Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2025. Vol. 19. No. 2. Pp. 12-18. DOI: 10.31161/1995-0659-2025-19-2-12-18 (in Russian)

Введение

Множество задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности, требует установления численных значений. Тем не менее, по ряду причин, далеко не все задачи можно разрешить с помощью аналитических методов. В современную эпоху, когда компьютеры стали неотъемлемой частью повседневной жизни, большинство из таких задач решается именно при их помощи. Следовательно, вполне логично, что в Государственные стандарты общего и высшего образования, охватывающие широкий спектр специальностей (не ограничиваясь только математикой и информатикой), вошли темы, методы численного анализа, применяемые для разрешения математических задач.

Изучение уравнений начинается с ранних классов в школьной программе по математике и представляет собой часть дисциплины, посвященную исследованию разнообразных видов уравнений и подходов к их решению.

В общем виде любое уравнение с одной переменной можно записать следующим образом:

$$f(x) = 0. \qquad (1)$$

Школьная математика рассматривает точные методы для решения уравнений. Через графиков функций в основной школе рассматривает приближенный метод нахождения корня уравнения (1).

В школьной математике рассматривают точные методы решения уравнений. Для нахождения приближенных решений уравнений применяют графический подход. Тем не менее, использование графического метода затрудняет точное определение приближенного корня с требуемой степенью точности.

Для определения приблизительного значения корня уравнения с установленной точности можно применять различные численные техники, такие как метод бисекции, метод Ньютона, метод секущих и итерационные методы. Существует множество подходов для вычисления приблизительного значения корня уравнения. На практике обычно выбирают метод, где скорость сходимости итерационной последовательности к корню была быстрая. Для некоторых методов можно использовать различные вариации.

Материалы и методы исследования

В данном исследовании мы рассматриваем специфическую методику для приближенного решения уравнений (1) через численные методы, опирающиеся на хордовые и касательные методы.

Данный комбинированный подход эффективно интегрирует элементы как методов хорд, так и касательных, что позволяет находить решения нелинейных уравнений (1) с заданной точностью ε.

Поиск искомого корня выполняется одновременно с обоих концов отрезка, в пределах которого располагается корень уравнения.

Следует иметь в виду, что начальное значение в методе касательных определяется тем концом интервала, для которого выполняется условие $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Предположим, что $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. В данной ситуации метод касательных будет работать с левого края, в то время как метод хорд начнет свое действие с правого края. Итерационные формулы [1, 2]:

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}, \quad b_{k+1} = \frac{a_k \cdot f(b_k) - b_k \cdot f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}. \quad (2)$$

Общую формулировку задачи можно представить следующим образом: существуют точные методы решения уравнений (1), которые подходят лишь для ограниченного класса уравнений, таких как квадратные, биквадратные, а также некоторые тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и т. д.

В ряде случаев математические модели конкретных задач формируют уравнения, для которых точные методы решения отсутствуют. Даже при использовании точных методов не всегда возможно получить точный ответ (например, при решении уравнения $x^2 = 2$).

В подобных ситуациях для решения уравнения (1) применяют методы, основанные на численном приближении. Процесс нахождения решения с помощью таких методов включает два этапа:

1) Определение всех корней уравнения, что означает необходимость установить интервал, в котором располагается ровно один корень;

2) Уточнение каждого из найденных корней, что подразумевает поиск значения корней уравнения с определенной точностью.

Эти численные техники позволяют достигать необходимой точности и эффективно работать с задачами, которые могут быть сложными для аналитического решения.

Отделить корни уравнения можно графическим способом и аналитическим способом.

Для того, чтобы визуально выделить корни уравнения, требуется создать график функции $y = f(x)$ и определить соответствующий интервал для каждой точки, в которой график пересекает ось X. Если график функции f(x) вызывает затруднения, можно выразить её как разность двух простых функций: $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. После этого необходимо отобразить графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в одной системе координат. Важно отметить, что если x является корнем уравнения, то f(x)=0 соответствует равенству $f_1(x) = f_2(x)$. Таким образом, значения x, в точках пересечения этих графиков, будут представлять собой корни уравнения.

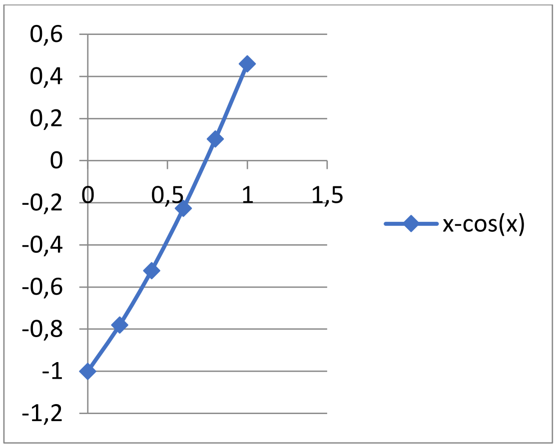

Рис. 1. Графический способ для нахождения корня уравнения $x - cosx = 0$

Для использования аналитического метода поиска корня уравнения можно обратиться к следующему принципу: если функция f(x) удовлетворяет определенным требованиям, т. е. она непрерывна и задана на интервале [a; b], причем произведение значений f(a) и f(b) оказывается отрицательным, а также на данном промежутке имеется производная, сохраняющая один и тот же знак, то в отрезке [a;b] существует ровно один корень уравнения $f(x) = 0$.

Таблица

Аналитический метод отделения корня уравнения (1)

x	0	0,2	0,4	0,6		0,8	1	
x-cos(x)	-1	-0,780	-0,521	-0,225		0,103	0,460	

Уточнение корня уравнения подразумевает, что, если известен интервал, содержащий единственный корень, дальнейшая задача заключается в нахождении его приближенного значения с заданной степенью точности.

Процесс нахождения более точного корня обычно осуществляется через итерационные методы. При этом алгоритм, который используется для генерации последовательности приближений, должен быть простым, надежным и экономически эффективным. Последний аспект связан с тем, как быстро и эффективно данный алгоритм сходится к истинному значению корня.

Существуют различные методы, которые можно применять для уточнения корня, такие как метод половинного деления, метод итераций, метод секущих, метод Ньютона и комбинированные техники. Эти подходы позволяют находить корень уравнения с необходимой точностью, оптимизируя при этом вычислительные затраты.

Результаты и обсуждение

В данном исследовании предлагается авторский подход к внедрению раздела «Приближенное решение уравнений» с использованием методов касательных и хорд в курсе «Численные методы». Этот подход реализуется в рамках подготовки бакалавров педагогического образования по направлениям «Математика» и «Информатика» в сфере физико-математического и информационно-технологического образования в Дагестанском государственном педагогическом университете им. Р. Гамзатова.

В научной литературе приводятся методы, когда один конец графика является неподвижной точкой и все зависит от знаков производных первого и второго порядков. Мы предлагаем метод, когда оба конца графика подвижны (рис. 3 и 4).

Обычно в исследованиях изложена такая методика решения уравнений: при проведении хорды один конец графика неподвижен (рис. 3).

Мы в своей работе предлагаем следующий алгоритм приближенного решения уравнений (рис. 3):

1. Проверить знаки производных первого и второго порядков в промежутке, где отделен корень.
2. На том конце графика, где функция и вторая производная имеют одинаковые знаки провести касательную.
3. Определите координаты точки, где касательная пересекает график функции.
4. Проведите хордальную линию между пунктом, указанным в шаге 3, и другим концом графика.
5. Продолжайте повторять эти действия до тех пор, пока не достигнете требуемой точности.

Как видно из результатов выполнения программы, количество шагов, когда оба конца отрезка содержащий корень уравнения подвижны, меньше, чем когда один конец отрезка неподвижен.

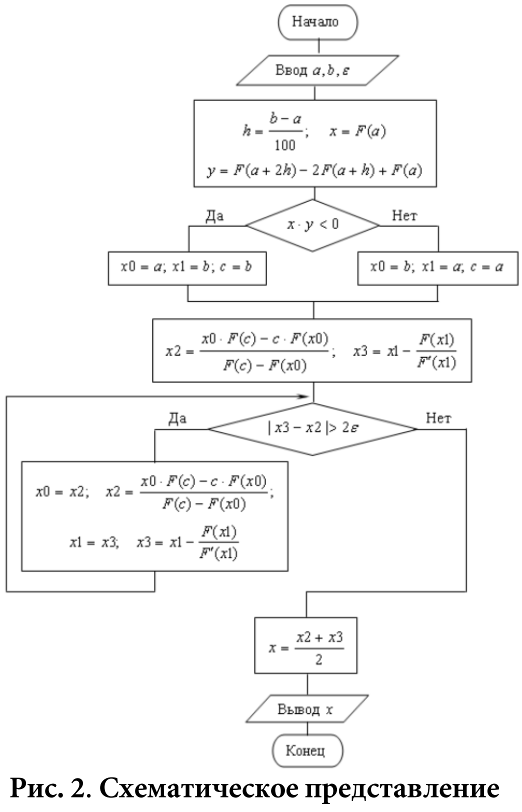

Рис. 2. Схематическое представление алгоритма уточнения корня уравнения (1) с использованием смеси методов хорд и касательных

Составим программы решения уравнений с одной переменной на языке PascalABC [1; 3; 6] соответствующие рис. 3 и рис. 4.

Скриншот программы 1

```
program MKX1; {Программа с одним подвижным концом}
label m1,m2;
var a, b, e, x,y:real;
k1_e:integer;
function f(t: real): real; begin f:= t- cos(t); end;
function q(t: real): real; begin q:= 1+ sin(t); end;
begin
read(a, b, e);
x:= a; y:= b; k1_e:=0;
m1:x:= x- f(x)/(f(b)- f(x))*(b- x);
y:= y- f(y)/q(y);
k1_e:= k1_e+1;
if abs(x-y)<2*e then begin writeln('Корень с точностью',
e,'=',(x+y)/2);
goto m2; end else goto m1;
m2:writeln('количество шагов при e (',e,')=', k1_e);
end.
```

При a=0, b=1.57, e=0.001
Корень с точностью 0.001=0.73818
Количество шагов при e (0.001)=3
При a=0, b=1.57, e=0.001
Корень с точностью 0.000001=0.739085
Количество шагов при e (0.000001)=7

Скриншот программы 2

```
program MKX2;{Программа с  подвижными концами}
Var a, b, e, x,y:real;
k2_e:integer;
label m1,m2;
function f(t: real): real; begin f:= t- cos(t); end;
function q(t: real): real; begin q:= 1+ sin(t); end;
begin
read(a, b, e);
x:= a; y:= b; k2_e:=0;
m1:y:= y- f(y)/q(y);
x:= x- f(x)/(f(y)- f(x))*(y- x);
k2_e:= k2_e+1;
if abs(x-y)<2*e then begin writeln('Корень с точностью',e,'=',(x+y)/2);
goto m2; end else goto m1;
m2:writeln('количество шагов при e (',e,')=', k2_e);end;
end.
```

При a=0, b=1.57, e=0.001
Корень с точностью 0.001=0.73931
Количество шагов при e (0.001)=2
При a=0, b=1.57, e=0.001
Корень с точностью 0.000001=0.739085
Количество шагов при e (0.000001)=3

Так как $f(0) * f(\pi/2) < 0$ и производная от функции $f(x) = x - cos(x)$ на отрезке [0; π/2] больше нуля, то единственный корень уравнения $x - cos(x) = 0$ содержится на отрезке [0; π/2].

Через $k1(e)$ и $k2(e)$ обозначим количество шагов при решении уравнения $x - cos(x) = 0$ методом касательных и хорд по схемам рис. 3 и рис. 4 соответственно с точностью e.

В качестве примера рассматривается уравнение $x - cos(x) = 0$. С помощью программ, написанных на языке PascalABC, было продемонстрировано, что количество шагов, необходимое для нахождения решения этого уравнения с использованием комбинированного метода различными способами (рис. 3 и 4), может варьироваться. В частности, когда оба конца отрезка, содержащего корень уравнения, являются подвижными, то число шагов для достижения заданной точности оказывается меньшим по сравнению с ситуацией, когда один из концов остается фиксированным.

Заключение

Отсюда видно, что по методу, когда оба конца – переменные (рис. 4), скорость сходимости итерационной последовательности к корню быстрая, чем по методу, когда один конец – переменная (рис. 3).

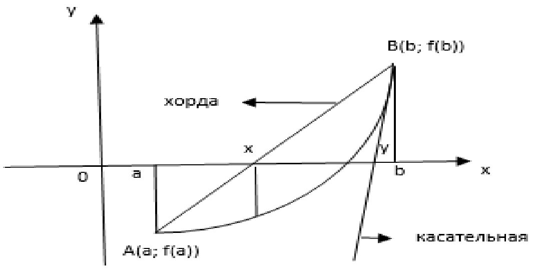

Рис. 3. Точка $B(b; f(b))$неподвижна

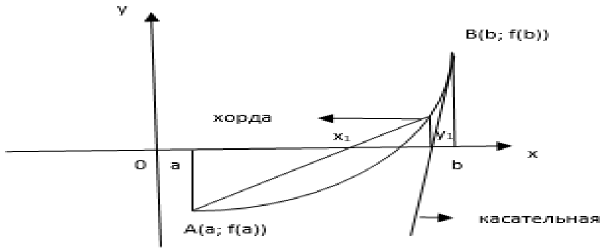

Рис. 4. Оба конца $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ подвижны

Литература

1. Епанешников А. М. Программирование в среде Turbo Pascal 7.0. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2014. 367 с.
2. Пантелеев А. В. Численные методы. Практикум. М.: Инфра-М, 2018. 160 с. М.: КД Либроком, 2015. 248 с.
3. Поддубная Л. М. Мне нравится Паскаль. М.: Радио и связь, 2015. 160 с.
4. Семакин И. Г. Программирование, численные методы и математическое моделирование (для бакалавров). М.: КноРус, 2018. 288 с.
5. Форсайт Р. Паскаль для всех. М.: Машиностроение, 2016. 288 с.
6. Численные методы / Под ред. Лапчика М. П. М.: Academia, 2017. 608 с.

References

1. Epaneshnikov A. M. *Programmirovanie v srede Turbo Pascal 7.0* [Programming in the Turbo Pascal 7.0 environment]. Moscow: DIALOG-MIFI, 2014. 367 p. (In Russian)
2. Panteleev A. V. *Chislennye metody. Praktikum* [Numerical methods. Practicum]. Moscow: Infra-M, 2018. 160 p. Moscow: CD Librocom, 2015. 248 p. (In Russian)
3. Poddubnaya L. M. *Mne nravitsya Paskal'* [I like Pascal]. Moscow: Radio and Communications, 2015. 160 p. (In Russian)
4. Semakin I. G. *Programmirovanie, chislennye metody i matematicheskoe modelirovanie (dlya bakalavrov)* [Programming, numerical methods and mathematical modeling (for bachelors)]. Moscow: KnoRus, 2018. 288 p. (In Russian)
5. Forsajt R. *Paskal' dlya vsekh* [Pascal for everyone]. Moscow: Mashinostroenie, 2016. 288 p. (In Russian)
6. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Edited by Lapchika M. P. Moscow: Academia, 2017. 608 p. (In Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
Принадлежность к организации

Агаханов Селимхан Агаханович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и информационно-коммуникационных технологий, институт физико-математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: selimkhan.agakhanov@mail.ru;

Баламирзоев Абдул Гаджибалаевич, доктор технических наук, профессор, кафедра информатики и вычислительной техники, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова; кафедра экономики и управления, Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Махачкалинский филиал, Махачкала, Россия; e-mail: abdul2000@yandex.ru

Рагимханова Гюльнара Сарухановна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и информационно-коммуникационных технологий, институт физико-математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: gulnara_6789@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS
Affiliations

Selimhan A. Agahanov, Ph. D. of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, the chair of Informatics and Information and Communication Technologies, Institute of Physical, Mathematical and Information Technology Education, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: selimkhan.agakhanov@mail.ru

Abdul G. Balamirzoev, Doctor of Technical Sciences, professor, the chair of Computer Science and Computer Engineering, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University; the chair of Economics and Management, Moscow Automobile and Road Technical University, Makhachkala Branch, Makhachkala, Russia; e-mail: abdul2000@yandex.ru

Gyulnara S. Ragimkhanova, Ph. D. of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor, the chair of Informatics and Information and Communication Technologies, Institute of Physical, Mathematical and Information Technology Education, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: gulnara_6789@mail.ru

Принята в печать 28.03.2025 г.

Received 28.03.2025.