Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Article
УДК 378.147
DOI: 10.31161/1995-0659-2025-19-3-86-92

Методы математического моделирования в педагогическом образовании

©2025 **Ярахмедов Г. А.**
Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: Yari.85@mail.ru

РЕЗЮМЕ. Цель – для целостного восприятия методических объектов различных областей знания и более эффективного их применения в стратегии современного педагогического образования установить связь между методологическими принципами интегральной математики и принципами математического моделирования. **Методы.** Для достижения поставленной цели применяются методы кластерного анализа моделей математических структур и сравнения их с аналогичными структурами других предметных областей, а также методы факторизации моделей по типам их представления. **Результаты.** Комбинируя различные методы и подходы моделирования и базисные математические структуры, предпочитая матричные представления знаний, определена методологическая основа для анализа знаний различных предметных областей с помощью математического моделирования объектов и явлений природы. На примере модели когнитивной матрицы установлена связь между основными понятиями логики, алгебры, дисперсионного анализа и теории вероятностей. **Выводы.** Установлено, что анализ знаний любой предметной области и мониторинг учебно-научной деятельности субъекта в конкретной среде целесообразно проводить на математических моделях. В исследовательской стратегии моделей наиболее эффективными оказываются когнитивные матрицы, тесно связанные с компонентами образовательной деятельности.

Ключевые слова: математическая модель, интегральная математика, искусственный интеллект, нейросеть, информация, онтология, когнитивная матрица.

Формат цитирования: Ярахмедов Г. А. Методы математического моделирования в педагогическом образовании // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2025. Т. 19. № 3. С. 86-92. DOI: 10.31161/1995-0659-2025-19-3-86-92

Mathematical Modeling Methods in Teacher Education

©2025 **Gadjiakhmed A. Yarakhmedov**
Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: Yari.85@mail.ru

ABSTRACT. The **aim** is to establish a link between the methodological principles of integral mathematics and the principles of mathematical modeling for a holistic perception of methodological objects of various fields of knowledge and their more effective application in the strategy of modern teacher education. **Methods**. To achieve this goal, methods of cluster analysis of models of mathematical structures and their comparison with similar structures in other subject areas are used, as well as methods of factorization of models by types of their representation. **Results**. Combining various modeling methods and approaches and basic mathematical structures, preferring matrix representations of knowledge, the methodological basis for analyzing knowledge of various subject areas using mathematical modeling of objects and natural phenomena is determined. Using the example of the cognitive matrix model, the connection between the basic concepts of logic, algebra, analysis of variance and probability theory is established. **Conclusions**. It has been established that it is advisable to analyze knowledge of any subject area and monitor the educational and scientific activities of a subject in a specific environment using mathematical models. In the research strategy of models, cognitive matrices that are closely related to the components of educational activity turn out to be the most effective.

Keywords: mathematical model, integral mathematics, artificial intelligence, neural network, information, ontology, cognitive matrix.

For citation: Yarakhmedov G. A. Mathematical Modeling Methods in Teacher Education. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2025. Vol. 19. No. 3. Pp. 86-92. DOI: 10.31161/1995-0659-2025-19-3-86-92 (in Russian)

Введение

В стратегии научно-исследовательской деятельности, а также в современной образовательной среде актуальными становятся принципы и методы математического моделирования объектов и явлений окружающего мира. Под математической моделью понимается замена материального объекта или реального процесса соответствующей формализованной моделью, построенной на основе понятий и структур математики. В частности, в обучении математике и смежных с ней наук на различных уровнях образования, в которых часто превалируют индивидуальные психологические и познавательные особенности восприятия и способов переработки информации, целесообразно ориентировать образовательную деятельность на целостное восприятие методического объекта. Такое восприятие, на наш взгляд, достигается актуализацией принципов интегральной математики, объединяющей как методы математики, так и методы естественных наук с методами математического моделирования.

Цель исследования: установить связь между методологическими принципами интегральной математики и принципами математического моделирования для более эффективного их применения в стратегии современного педагогического, а также информационно-технологического образования.

В зависимости от поставленной задачи все модели делятся на классы (аналитические, имитационные, эмпирико-статистические и т. д.), в которых выделяются соответствующие методы решения и ситуативного анализа создавшейся конфигурации взаимодействующих базисных элементов методических объектов той или иной предметной области [4]. Следует также отметить, что в настоящее время важную роль в решении стратегических задач различных сфер жизнедеятельности играют модели искусственного интеллекта, нейросетей, самоорганизующихся и робототехнических систем. Для математического анализа этих систем применяются методы так называемой нейронной или квантовой математики [1-3]. Для анализа информационных потоков на начальном этапе обычно пользуются графо-семиотическими моделями, которые в дальнейшем часто переходят в алгебраические модели, представляемые матрицами [5; 6]. Приоритет матричных представлений объясняется, прежде всего, удобством описания, анализа и компьютерной реализации потока информации в различных по типам и размерностям пространствах. Так, например, в различных разделах математики моделями матричных представлений или их определителей задаются: системы линейных уравнений; площади и объемы линейных фигур; взаимное расположение прямых и плоскостей; бинарные отношения на множествах, графы инцидентности и смежности; любые конечные группы; кодовые слова (хемминговы коды), нечеткие информации и т. д. Более того, матричные модели и все связанные с ними понятия, успешно применяются при построении моделей явлений и процессов в естественных, экономических и даже гуманитарных науках. Такие представления в особенности характерны для дискретных, статистических и стохастических процессов, с которыми человек часто сталкивается в своей повседневной жизни. Поэтому жизнедеятельностное мышление и логика, релевантная ему, и должны быть определяющими компонентами в деятельности человека как личности в среде общения и как субъекта в жизни общества.

Человек как субъект когнитивной деятельности заинтересован, прежде всего, в получении знаний, структурированных по уровням: знания как отдельные фрагменты личностно-ориентированной стратегии; знания как элементы поля взаимодействия информационных потоков, определяемых субъектами деятельности; база знаний как когнитивное пространство предметной области. Взаимодействие субъекта (человека) и ЭВМ в когнитивном пространстве порождает иной вид сущности предметной области, отличный от каждого из них в отдельности, но вместе представляющий собой комплекс в виде интеллектуализированной системы (Ин С) [3]. В общем случае, Ин С решают как задачи анализа и синтеза, так и комбинированные задачи. По сложности и типу ЭВМ они делятся на простые и сложные, а по типу предметной области – на статические и динамические. Эффективность взаимосвязи между субъектом (человеком) и ЭВМ в Ин С во многом определяется существованием набора принципов и правил, с помощью которых из данных знаний получаем новые формализацией и моделированием интеллектуальной, творческой деятельности человека и ее реализацией на ЭВМ. Но, а в формализации и моделировании деятельности человека наиболее естественным способом описания любых сущностей предметной области является соотнесение с ними в собственной памяти совокупности определенных понятий (простых и сложных), образующих понятийную структуру предметной области, а в памяти ЭВМ – некоторых объектов, состоящих из атрибутов со значениями. Под простым понятием в такой деятельности понимается тройка, состоящая из имени, интенсионала и экстенсионала понятия, а под сложным понятием – понятие, образованное из ранее определенных понятий применением некоторых правил. В своей интеллектуальной и учебной деятельности человек использует различные понятия, причем организованную в сложную иерархию, обычно называемую иерархией онтологий (сущностей). Если классические модели данных (иерархические и сетевые) базируются на таких понятиях, как «запись», «атрибут» и «связь», то в современных моделях данных (реляционные и семантические) используют математическое понятие «отношение», которое задается на множествах, и понятие объекта для представления сущностей предметной области в базе данных. Поэтому в образовательной деятельности важно установить связь между основными методологическими принципами интегральной математики и принципами математического моделирования [7]. Так, например, вариационному принципу математического моделирования соответствует принцип определенности, принципу иерархии (или иерархическому подходу) – принцип соответствия, а принцип аналогии в обоих случаях проявляется одинаково. Более конкретно, свойства формализованной показательной функции одинаково проявляется в аналогичных моделях роста численности популяций живых организмов и радиоактивном распаде химических элементов.

Итак, процесс формализации и компьютерного моделирования, творческой деятельности субъекта, как обобщенный образ процесса моделирования объектов и явлений, представляется и как процесс формализации новых понятий, и как процесс обучения уже известным понятиям. Обычно выделяются два подхода к формальному представлению содержания любого понятия: теоретико-множественный (или теоретико-модельный к представлению онтологий) и логический. При теоретико-множественной формализации в интенсионал включают множество всех дифференциальных признаков, характеризующих понятие. При этом под интенсионалом простого понятия понимают совокупность признаков, необходимых и достаточных для принятия решения о принадлежности некоторой сущности экстенсионалу данного понятия.

Применяемые в современных исследованиях в области моделирования представлений понятий онтологии, определяют формальное описание предметной области, цель которого – в явном виде определить смысл терминов, специфичных для данной предметной области, т. е. онтологии должны описывать общие свойства предметной области, не зависящие от конкретной реализации. Под формальной онтологией предметной области в таком контексте понимается пара, состоящая из множества ключевых понятий предметной области σ и множества аналитических предложений A, описывающие смысл этих ключевых понятий. Например, формальная онтология понятия вектора, определяемого как направленный отрезок, состоит из двух ключевых понятий аналитической геометрии (направление, отрезок) и одного предложения, а формальная онтология векторного произведения векторов состоит из четырех ключевых понятий (вектор, перпендикуляр, длина вектора, ориентация) и трех предложений. Множество T предложений, которые являются верным в каждом примере предметной области, называют теорией предметной области. Предполагается, что теория является дедуктивно замкнутым множеством предложений. Далее, в соответствии с общей теорией моделей строится модель онтологий и в такой модели вводятся бинарные отношения, которые, с помощью графов, определяемых множествами понятий и предложений, структурируют ее в виде лингвистической сети, обобщаемой до формальной синтаксической сети, и которая, в конечном итоге, описывается на языке решеток.

Такое представление моделей играет важную роль в направлении инженерии знаний, которое имеет дело с автоматизацией извлечения информации из текстов естественного языка. Тем самым понятие, определяемое содержанием и объемом, тесно связанное с интенсионалом и экстенсионалом (концептом и денотатом), становится чрезвычайно удобным средством, которое позволяет, с одной стороны, путем использования интенсионала выразить семантические отношения для некоторого фрагмента реального мира, а с другой, с помощью схемы обеспечить возможность перехода к менее детальному описанию и представлению этой информации в базе знаний.

Результаты исследования и обсуждение

Для размещения базы знаний в компьютере с целью ее использования для решения прикладных задач, необходимо ее формальное описание с помощью математических моделей. Как обычно, представление знаний осуществляется в декларативных (сетевая и фреймовая) и процедурных (логическая и продукционная) моделях.

Таким образом, комбинируя различные подходы моделирования (теоретико-множественный, логический) и базисные математические структуры (порядковые, алгебраические, топологические), отдавая предпочтение матричным моделям представления знаний, определим методологию для анализа базы знаний данной предметной области (и даже комплекса знаний нескольких предметных областей) и построения соответствующих моделей, играющих важную роль в когнитивной деятельности. Особенно актуальными в такой деятельности являются матричные модели в образовательном пространстве, хотя основные идеи их анализа и синтеза успешно можно применить практически в любой сфере деятельности человека. В дальнейшем мы их будем называть когнитивными матрицами-моделями, или просто когнитивными матрицами. Так, например, когнитивные матрицы можно применить при изучении эффективности социально-экономической или иной стратегии деятельности (праксиология), в деятельности человека (субъекта) в работе, среде (эргономика), в анализе данных анкетирования, применяемого для получения эмпирической информации, касающейся объективных и субъективных факторов (знаний, мнений, оценок, поведения), и тестирования как стандартизованной методики, предназначенной для диагностики выраженности психических свойств или состояний у индивида при решении практических задач. Осуществим эту процедуру на языке матриц следующим образом.

Итак, пусть A – множество имен (именованное множество), B – множество свойств (атрибутов, признаков) и $\triangle$ – бинарное отношение, выражающее, владеет ли имя $a_i \in A$ понятием $b_j \in B$, или обладает ли элемент (объект) a_i свойством b_j. Кроме того, $\triangle$ связывает в единое целое имя, сущность и понятие, а значение такого отношения – домен – обозначим через a_{ij}. Имя или знак – единица языка, отражающая семантически сущность отображаемого мира, а синтаксически – субъект или объект высказывания. В пропозициональной функции имя представляется предметной переменной или константой. Тогда множество всех доменов $\{a_{ij}\}$ представляется в виде матрицы (a_{ij}), или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

т. е. в виде матрицы размера $n \times m$.

В зависимости от того, является ли отношение $\triangle$ четким или нечетким на декартовом произведении $A \times B$, значения a_{ij} принадлежат либо множеству $\{0,1\}$ – в двузначной логике, либо множество $[0, 1]$ – в многозначной и, тем самым, соответствующие процедуры исследования проводятся либо на языке алгебры четких множеств, либо алгебры нечетких множеств. В первом случае элементы когнитивной матрицы принимают значения из множества $\{0, 1\}$, а во втором случае – из множества $[0, 1]$.

Если для одного и того же именованного множества задать два бинарных отношения Δ_1 и Δ_2 на декартовых произведениях $A \times B_1$и $A \times B_2$, то для их когнитивных матриц операции дизъюнктивной суммы и конъюнктивного произведения определяются следующим образом.

В алгебре четких множеств под дизъюнктивной суммой когнитивных матриц одного и того же размера $B_1 = \left(b_{ij}^{(1)}\right), B_2 = \left(b_{ij}^{(2)}\right)$ будем понимать матрицу $B_1 + B_2 \coloneqq \left(b_{ij}^{(1)} \vee b_{ij}^{(2)}\right)$, а под их конъюнктивным произведением – матрицу $B_1 \cdot B_2 \coloneqq \left(b_{ij}^{(1)} \wedge b_{ij}^{(2)}\right)$. В первом случае элементы матрицы $B_1 + B_2$ определяются как дизъюнкции соответствующих элементов матриц B_1, B_2, а во втором – элементы матрицы $B_1 \cdot B_2$ определяются как конъюнкции соответствующих элементов матриц B_1, B_2. Из ассоциативности операций дизъюнкции и конъюнкции следует обобщение определений этих операций для любого конечного числа когнитивных матриц.

Но, а если для двух именованных множеств A_1, A_2 задать одно бинарное отношение Δ на двух декартовых произведениях $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2$, то аналогично определяются операции дизъюнктивной суммы и конъюнктивного произведения когнитивных матриц $A_1 = \left(a_{ij}^{(1)}\right), A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$.

Такое соответствие между этими представлениями позволяет переход от одной его модели к другой в зависимости от структуры решаемой задачи и эффективности выбранной стратегии, обеспечивающей оптимальное значение целевой функции.

Кроме того, во множестве когнитивных матриц, по аналогии с общей теорией матриц, можно ввести евклидову метрику, полагая $|B|^2 = \sum_{i,j} \; b_{ij}^{(2)}$.

Нетрудно убедиться, что относительно дизъюнктивной суммы и конъюнктивного произведения метрика (3.3.3) во множестве когнитивных матриц удовлетворяет неравенствам:

$$|B_1 + B_2| \leq |B_1| + |B_2|,$$
$$|B_1 \cdot B_2| \leq |B_1| \cdot |B_2|.$$

Такой синтез методов метрической и когнитивной теорий матриц позволяет, в частности, установить содержательную связь между основными понятиями математической логики, алгебры и дисперсионного анализа в теории вероятностей для более эффективного мониторинга знаний на различных уровнях когнитивной деятельности.

Проиллюстрируем сущностный характер введенных операций на конкретных примерах представления базы знаний в модели когнитивных матриц и мониторинга знаний предметной области в образовательной деятельности.

Пример. Пусть А – число студентов определенной группы, а B_1, B_2 – два множества контрольных (зачетных) вопросов. Тогда домен $b_{ij}^{(1)}$ представляет собой либо 1, если *i*-й студент правильно отвечает на *j*-й вопрос множества B_1, либо 0, в противном случае; домен $b_{ij}^{(2)}$ представляет собой либо 1, если *i*-й студент правильно отвечает на *j*-й вопрос множества B_2 , либо 0, в противном случае. В когнитивной матрице размера $n \times m$ алгебраическая сумма чисел элементов строки $\leq m$, а элементов столбца $\leq n$. Для дизъюнктивной суммы B_1+B_2 когнитивных матриц B_1, B_2 домен $b_{ij}^{(1)} \vee b_{ij}^{(2)}$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда *i*-й студент правильно отвечает хотя бы на один *j*-й вопрос множеств B_1 или B_2; домен $b_{ij}^{(1)} \wedge b_{ij}^{(2)}$ для когнитивного произведения $B_1 \cdot B_2$ принимает значение 1 тогда и только, когда *i*-й студент множества А правильно отвечает на оба j-х вопроса множествB_1 и B_2.

Аналогично определяются дизъюнктивная сумма и конъюнктивное произведение когнитивных матриц и в случае алгебры нечетких множеств, если дизъюнкцию и конъюнкцию доменов $b_{ij}^{(1)}, b_{ij}^{(2)}$ определить соответственно

$$b_{ij}^{(1)} \vee b_{ij}^{(2)} \coloneqq \sup\left\{b_{ij}^{(1)}, b_{ij}^{(2)}\right\},$$
$$b_{ij}^{(1)} \wedge b_{ij}^{(2)} = \inf\left\{b_{ij}^{(1)}, b_{ij}^{(2)}\right\}.$$

В этом случае знания оцениваются по любой уже фиксированной целочисленной и неотрицательной шкале значений. Критерии оценок могут быть разными, но делением каждой оценки на максимально допустимую в данной шкале можно добиться того, чтобы все они принадлежали множеству [0, 1].

Следует также отметить, что иногда тройка Г, состоящая из двух четких множеств А, В и нечеткого отношения $\triangle$ на $A \times B$, в интеллектуальных информационных системах называется нечетким соответствием [3]. Помимо матричного, нечеткие соответствия задаются еще теоретико-множественно и графически, т. е. перечислением элементов $A, B, A \times B$ и неориентированным графом с множеством вершин $A \cup B$, каждой дуге (a_i, b_j) которого приписано значение домена b_{ij}. В теоретико-множественном представлении дизъюнкции и конъюнкции отношений соответствуют объединение и пересечение нечетких отношений, а в графовом представлении эти отношения определяются на объединении и пересечении графов. Приоритет того или иного представления математической модели отношений зависит от поставленной конкретной задачи.

Итак, человек (субъект) в своей повседневной жизни чаще всего мыслит и рассуждает нечетко выраженными понятиями и категориями. Но при этом он часто, пользуясь нечеткими понятиями естественного языка, стремится к использованию самой точной информации. Такой способ оценивания информации является качественным, так как отражает характер явления процесса, а использование лингвистического подхода к оцениванию или анализу сложных объектов и систем позволяет формализовать этот процесс посредством базовых математических структур нечетких понятий и отношений естественного языка, а затем и построить его математическую модель.

Выводы

Анализ знаний любой предметной области и мониторинг учебно-научной деятельности субъекта в конкретной среде целесообразно проводить на математических моделях, выявляя при этом общие принципы построения структур интегральной математики и математических моделей объектов произвольной природы. В исследовательской стратегии образовательной деятельности наиболее эффективными являются модели когнитивных матриц, поскольку матричное представление любой сущности всегда удобно как при анализе, так и при синтезе новых сущностей. При этом нетрудно заметить, что процесс представления знаний и мониторинга когнитивной деятельности с помощью когнитивных матриц, наиболее тесным образом связывает компоненты когнитивных комплексов «субъект – среда – знание» и «субъект – язык – объект».

Литература

1. Астафьева В. В. Разработка математической модели нейронной сети // Молодой ученый. 2016. № 19(123). С. 1-4.
2. Андреева Е. А., Цирулева В. И. Математическое моделирование управления динамической нейронной сетью с запаздыванием // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. Научный журнал. 2018. Т. 6. № 1. С. 61-74.
3. Гаскаров Д. В. Интеллектуальные информационные системы. Учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 431 с.
4. Звонарев С. В. Основы математического моделирования: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. 112 с.
5. Макусева Т. Г. Моделирование самообразовательной деятельности обучающихся при индивидуально-ориентированном обучении // Вестник Казанского гос. технологического ун-та. 2013. № 12. С. 350-353.
6. Цецорина Т. А. Диагностика индивидуальных особенностей восприятия и способов переработки информации у студентов, обучающихся по математическому профилю // Современные наукоемкие технологии. 2023. №5. С. 84-88.
7. Ярахмедов Г. А. Методология интегральной математики. Махачкала: Изд-во АЛЕФ, 2024. 186 с.

References

1. Astafyeva V. V. *Razrabotka matematicheskoy modeli neyronnoy seti* [Development of a mathematical model of a neural network]. A young scientist. 2016. No. 19(123). Pp. 1-4. (in Russian)
2. Andreeva E. A., Tsiruleva V. I. *Matematicheskoe modelirovanie upravleniya dinamicheskoy neyronnoy setu s zapazdivaniem* [Mathematical modeling of control of a dynamic neural network with delay]. Modeling, optimization, and information technology. Scientific Journal. 2018. Vol. 6. No. 1. Pp.61-74. (in Russian)

3. Gaskarov D. V. *Intellektualniye informatzionnye sistemy* [Intelligent information systems]. Textbook for universities. Moscow: Higher School, 2003. 431 p. (in Russian)

4. Zvonarev S. V. *Osnovy matematicheskogo modelirovaniya* [Fundamentals of mathematical modeling: a textbook]. Yekaterinburg: Ural Publishing House. University, 2019. 112 p. (in Russian)

5. Makuseva T. G. *Modelirovanie samoobrazovatelnoy deyatelnosti obuchaeushikhsya pri individualno-orientirovannom obuchenii* [Modeling of self-educational activity of students in individually-oriented learning]. Bulletin of Kazan State Technological University. 2013. No. 12. Pp. 350-353. (in Russian)

6. Tsetsorina T. A. *Diagnostika individualnykh osobennostey vospryatiya I sposobov pererabotki informatsii u studentov, obuchayushikhsya po matematicheskomu profilyu* [Diagnostics of individual characteristics of perception and methods of information processing among students studying in the mathematical profile]. Modern high-tech technologies. 2023. No. 5. Pp. 84-88. (in Russian)

7. Yarakhmedov G. A. *Metodologiya integralnoy matematiki* [Methodology of integral mathematics]. Makhachkala: ALEF Publishing House, 2024. 186 p. (in Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Принадлежность к организации

Ярахмедов Гаджиахмед Абдулганиевич, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор РАЕ, кафедра высшей математики, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: Yari.85@mail.ru

Принята в печать 21.08.2025 г.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Affiliation

Gadzhiakhmed A. Yarakhmedov, Ph. D. of Physico-Mathematical Sciences, assistant professor, RAE Professor, the chair of Higher Mathematics, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: Yari.85@mail.ru

Received 21.08.2025.