СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
Принадлежность к организации

Везиров Тимур Гаджиевич, доктор педагогических наук, профессор, кафедра методики преподавания математики и информатики, институт физико-математического и информационно-технологического образования, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: timur.60@mail.ru

Абдуллаева Оксана Таджутдиновна, преподаватель, Аграрный колледж, учитель физики, средняя общеобразовательная школа № 3, Дагестанские Огни, Россия; аспирантка, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: www.alieva1988@yandex.ru

Принята в печать 18.07.2024 г.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS
Affiliations

Timur G. Vezirov, Doctor of Pedagogy, professor, the chair of Methods of Teaching Maths and Informatics, Institute of Physics, Mathematics and Information Technology Education, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: timur.60@mail.ru

Oksana T. Abdullaeva, lecturer, Agrarian College, Dagestanskie Ogni; teacher of Physics, Secondary School No. 3, Dagestanskie Ogni, Dagestan, Russia; postgraduate, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: www.alieva1988@yandex.ru

Received 18.07.2024.

Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Article
УДК 37
DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-3-39-44

О вычислении углов между прямыми и плоскостями при обучении геометрии

© 2024 **Гаджимурадов М. А., Гаджиева З. Д.**
Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: matanaliz-dgpu@mail.ru, gadzhievazulfiyaa@mail.ru

РЕЗЮМЕ. Цель. Рассмотреть возможность применения векторно- координатного метода при вычислении углов между прямыми и плоскостями. **Методы.** Аналитико-синтетический метод, который позволяет вычислить углы между прямыми и плоскостями без выполнения наглядного рисунка. **Результат.** На примерах решения разного вида стереометрических задач проиллюстрировано применение координатного метода при вычислении углов. **Вывод.** Векторно- координатный метод можно эффективно использовать при решении стереометрических задач на вычисление углов между прямыми и плоскостями.

Ключевые слова: прямоугольная система координат, векторно-координатный метод, скалярное произведение векторов, правильная пирамида, шестиугольная призма.

Формат цитирования: Гаджимурадов М. А., Гаджиева З. Д. О вычислении углов между прямыми и плоскостями при обучении геометрии // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2024. Т. 18. № 3. С. 39-44. DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-3-39-44

On Calculating Angles Between Straight Lines and Planes in Geometry Training

© 2024 **Madrid A. Gadzhimuradov, Zulfiya D. Gadzhieva**
Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: matanaliz-dgpu@mail.ru, gadzhievazulfiyaa@mail.ru

ABSTRAKT. Aim. Consider the possibility of using the vector coordinate method in calculating angles between straight lines and planes. Methods. An analytical and synthetic method that allows you to calculate the angles between straight lines and planes without making a visual drawing. Result. The use of the coordinate method in calculating angles is illustrated by examples of solving various types of stereometric problems. Conclusion. The vector coordinate method can be effectively used in solving stereometric problems for calculating angles between straight lines and planes.

Keywords: rectangular coordinate system, vector coordinate method, scalar product of vectors, regular pyramid, hexagonal prism.

For citation: Gadzhimuradov M. A., Gadzhieva Z. D. On Calculating Angles Between Straight Lines and Planes in Geometry Training. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2024. Vol. 18. No. 3. Pp. 39-44. DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-3-39-44 (in Russian)

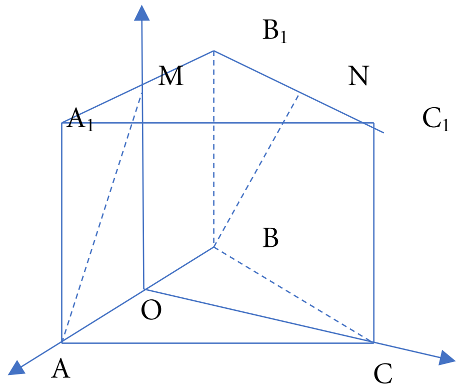
Введение

В курсе аналитической геометрии легко вычисляются углы между прямыми и плоскостями зная уравнения этих геометрических фигур. Но в программе школьного курса геометрии не рассматриваются уравнения прямых и плоскостей в пространстве [1]. С другой стороны, в контрольно-измерительных заданиях ЕГЭ по профильной математике часто встречаются стереометрические задачи на вычисление углов между скрещивающимися прямыми, между различными плоскостями [5]. Решение таких задач зачастую вызывают у учащихся большие трудности. Трудности связаны, прежде всего, с неумением построить на чертеже искомый угол, у учеников недостаточно развиты навыки выполнения стереометрических построений. В таких случаях эффективно можно использовать так называемый «векторно-координатный метод». Основным преимуществом этого метода является то, что подобные задачи решаются аналитическим методом без построения искомого угла между прямыми или плоскостями. Сущность метода заключается в том, что вводится прямоугольная декартова система координат, в которой легко определяются координаты вершин данного многогранника и координаты необходимых для решения задачи векторов. А затем используются знакомые учащимся формулы из векторной алгебры для вычисления угла между векторами с помощью скалярного произведения [4].

Рассмотрим примеры решения задач с использованием указанного выше метода.

Задача 1. В правильной треугольной призме ABC $A_1B_1C_1$ боковое ребро равно 5. Точки M и N – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Найти угол между прямыми AM и BN.



Решение

Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке O – середина ребра AB и координатные оси направим по прямым OA, OC, OM соответственно. Так как треугольник ABC равносторонний, то медиана CO является и высотой, т. е.:

CO$\perp AB$. Кроме того, OM$\perp OA$, OM$\perp OC$. В выбранной системе координат точки призмы имеют следующие координаты: O(0;0;0), A(2;0;0), M(0;0;5), $\overline{B}(-2;0;0)$, B_1(-2;0;5).

Находим $OC=\sqrt{AC^2-OA^2}=\sqrt{4^2}=2\sqrt{3}$. Тогда, C(0; $2\sqrt{3}$;0), $C_1(0;2\sqrt{3};5)$, N(-1;$\sqrt{3}$;5). Напишем координаты векторов

$\overline{AM}(-2;0;5)$, $\overline{BN}(-1;\sqrt{3};5)$. Косинус угла между векторами находим по формуле [2]

$$\cos\alpha=\frac{|\overline{AM}\cdot\overline{BN}|}{|\overline{AM}|\cdot|\overline{BN}|},$$

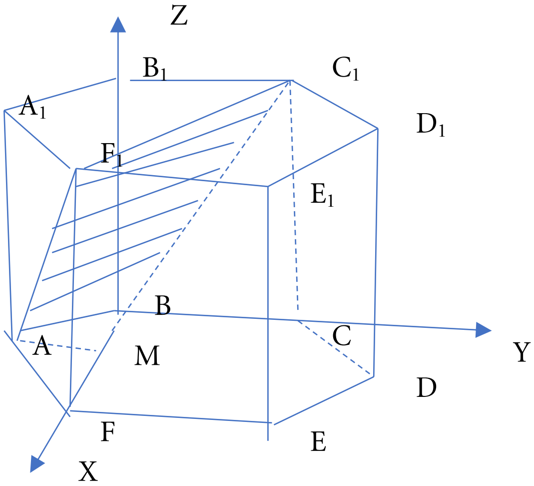
$$\cos\alpha=\frac{|-2.1+2\sqrt{3}.0+5.5|}{\sqrt{(-2)^2+0^2+5^3}\cdot\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+5^2}}=\frac{23}{29}.$$

$$\alpha=arccos\frac{23}{29}.$$

Результаты и их обсуждение

Задача 2. В правильной шестиугольной призме ABCDEF $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 6, а высота 4. Найти угол между прямой A_1C_1 и плоскостью BC_1F_1.

Решение



Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B, координатные оси которой направлены соответственно по прямым BF,BC, BB_1. Как известно из свойств правильного шестиугольника, BF⊥BC, $BB_1 \perp BF$, $BB_1 \perp BC$. В выбранной системе координат запишем координаты вершин многогранника: B(0;0;0), C(0;6;0), B_1(0;0;4), C_1(0;6;4). Используя теорему косинусов, получим

$$BF=\sqrt{AB^2+AF^2-2AB.AF.cos\alpha}=\sqrt{6^2+6^2-2.6.6.\cos 120^0}=\sqrt{36+36-72.\left(-\frac{1}{2}\right)}=6\sqrt{3}.$$

Тогда $F(6\sqrt{3};0;0)$, $F_1(6\sqrt{3};0;4)$.

Обозначим M – середину отрезка BF. Тогда AM – медиана, а следовательно высота и биссектриса в равнобедренном треугольнике BAF.

Так как BM $=3\sqrt{3}$, то AM$=\sqrt{AB^2-BM^2}=3$.

Тогда M($3\sqrt{3}$;0;0), A($3\sqrt{3}$;-3;0), A_1($3\sqrt{3}$, -3;4).

Таким образом,

$\overline{A_1C_1}(-3\sqrt{3};9;0)$,

$\overline{BF_1}(6\sqrt{3};0;4)$, $\overline{BC_1}(0;6;4)$.

Обозначим $\overline{m}$ вектор, удовлетворяющий условиям: $\overline{m}\perp\overline{BF_1}$, $\overline{m}\perp\overline{BC_1}$, т. е. $\overline{m}(m_1,m_2,m_3)\perp(BC_1F_1)$.

Тогда,

$$\begin{cases}\overline{m}\,.\,\overline{BF_1}=0\\ \overline{m}\,.\,\overline{BC_1}=0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}m_1.6\sqrt{3}.+m_2.0+m_3.4=0\\ m_1.0+m_2.6+m_3.4=0\end{cases}$$

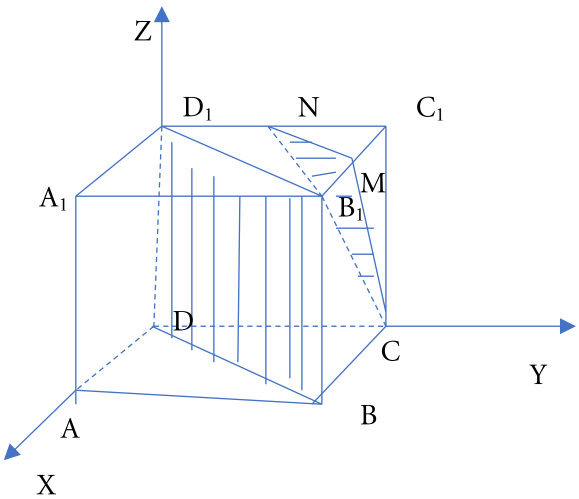
Решая систему, получим одно из частных решений $\overline{m}(2;2\sqrt{3};-3\sqrt{3})$.

Так как $\sin\alpha=\frac{|\overline{A_1C_1}.\overline{m}|}{|\overline{A_1C_1}|.|\overline{m}|}$, то подставив координаты векторов, находим

$$\sin\varphi=\frac{|(-3\sqrt{3},).2+9.2\sqrt{3}-0.(-3\sqrt{3},),|}{\sqrt{(-3\sqrt{3},)^2+9^2+0^2}.\sqrt{2^2+(2\sqrt{3},)^2+(-3\sqrt{3},)^2}}=\frac{2}{\sqrt{43}}.$$

$$\varphi=arcsin\frac{2}{\sqrt{43}}.$$

Задача 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N – середины ребер C_1B_1 и C_1D_1 соответственно, AB=8, AD=6, AA_1=6. Найти угол между плоскостями CMN и BDD_1.



Решение

Прямоугольную систему координат вводим следующим образом: начало координат совпадает с вершиной D, а координатные оси направлены по прямым соответственно DA, DC, DD_1.

Очевидно, DA$\perp DC$, $DD_1 \perp DA, DD_1\perp DC$. В построенной системе координат напишем координаты точек: D(0;0;0), C(0;8;0), D(0;0;6), N(0;4;6), M(3;8;6), B(6,ё1к8,0). Находим координаты векторов $\overline{DD_1}$(0;0;6), $\overline{DB}(6;8;0)$, $\overline{CN}$(0; -4;6),$\overline{CM}(3;0;6)$.

Вводим вектор $\overline{m}(m_1,m_2,m_3)$ такой, что $\overline{m}\perp\overline{DD_1}$ и $\overline{m}\perp\overline{DB}$.

Следовательно, $\begin{cases}\overline{m}\cdot\overline{DD_1}=0\\ \overline{m}\cdot\overline{DD_1}=0\end{cases}$

Подставив координаты векторов, получим $\begin{cases}m_1.0+m_2\cdot 0+m_3\cdot 6=0\\ m_1.6+m_2\cdot 8+m_3\cdot 0=0\end{cases}$

Одним из частных решений этой системы является набор чисел

$m_1=4,\ m_2=-3,\ m_3=0$, т.е. $\overline{m}$(4;-3;0)

Обозначим через $\overline{n}\,(n_1,n_2,n_3)$ вектор, удовлетворяющий условиям: $\overline{n}\perp\overline{CN}$ и $\overline{n}\perp CM$, т. е. $\overline{n}\perp(MCN)$.

Тогда $\begin{matrix}\overline{n}\cdot\overline{CN}=0\\ \overline{n}\cdot CM=0\end{matrix}\leftrightarrow$

$$\begin{cases}n_1\cdot 0+n_2\cdot(-4)+n_3\cdot 6=0\\ n_1\cdot 3+n_2\cdot 0+n_3\cdot 6=0\end{cases}$$

Находим одно из решений данной системы: $n_3=2, n_2=3, n_1=4$, т. е. $\overline{n}\,(-4;3;2)$.

Далее угол между двумя плоскостями находим как угол между перпендикулярными векторами этих плоскостей.

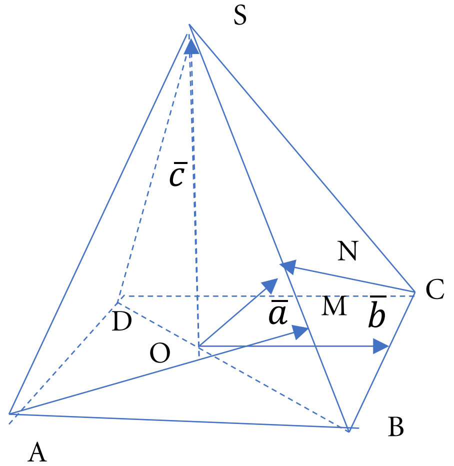
$$\cos\alpha=\frac{|\overline{m}\cdot\overline{n}|}{|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|};\quad \cos\alpha$$
$$=\frac{|4\cdot(-4)+(-3)\cdot 3+6\cdot 2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{29}}$$

$\alpha=arccos\sqrt{\frac{25}{29}}$.

Задача 4. Дана четырехугольная пирамида SABCD с прямоугольником ABCD в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $4\sqrt{2}$. Вершина пирамиды S проецируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершины A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AM и CN.

а) Докажите, что точка M является серединой отрезка BN.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если ребро SD равна 8.



а) Систему координат и базисные векторы $\overline{a},\overline{b},\ \overline{c}$ выберем следующим образом: начало координат совпадает с точкой пересечения диагоналей основания пирамиды, $\overline{a}=\frac{\overline{AD}}{2}$, $\overline{b}$=$\frac{\overline{AB}}{2}$, $\overline{c}$=$\frac{\overline{OS}}{2}$.

Из треугольника ABM имеем $\overline{AM}=\overline{AB}+\alpha\cdot\overline{BC}$.

Используя условие перпендикулярности двух векторов, получим:

$\overline{AM}\cdot\overline{BS}=0,\quad \overline{AB}\cdot\overline{BS}+\alpha\cdot\overline{BS^2}=0$

Используя разложения векторов через базисные,$\overline{AB}=2\overline{b},\quad \overline{BC}=-\overline{b}+\overline{a}+\overline{c}$,

Имеем равенство $2\overline{b}\cdot(-\overline{b}+\overline{a}+\overline{c})+\alpha(-\overline{b}+\overline{a}+\overline{c})^2=0$

Учитывая, что косинус угла между базисными векторами равен нулю, после элементарных преобразований получим:

$-2\overline{b}^2+2|\overline{b}|\cdot|\overline{a}|\cdot 0+2|\overline{b}|\cdot|\overline{c}|\cdot 0+\alpha\big(\overline{b}^2+\overline{a}^2+\overline{c}^2-2|\overline{b}|\cdot|\overline{a}|\cdot 0-2|\overline{b}|\cdot|\overline{c}|\cdot 0+2|\overline{a}|\cdot|\overline{c}|\cdot 0\big)\leftrightarrow -2\overline{b}^2+\alpha(\overline{b}^2+\overline{a}^2+\overline{c}^2)$=0, $\alpha=\frac{2\overline{b}^2}{\overline{b}^2+\overline{a}^2+\overline{c}^2}$.

Подставим длины базисных векторов: $\alpha=\frac{8}{12+\overline{c}^2}$.

Точно так же рассуждая, из прямоугольного треугольника CSN получаем:

$\overline{CN}=\overline{CB}+\beta\cdot\overline{BS}$; $\overline{CN}\cdot\overline{BC}=0$, $\overline{CB}\cdot\overline{BS}+\beta\cdot\overline{BS^2}=0$.

Разложив векторы через базис, после элементарных преобразований получаем: $-2\overline{a}^2+\beta\big(\overline{b}^2+\overline{a}^2+\overline{c}^2\big)=0$, $\beta=\frac{2\overline{a}^2}{\overline{b}^2+\overline{a}^2+\overline{c}^2}$.

Подставим значения длин базисных векторов: $y=\frac{16}{12+\overline{c}^2}$.

Сравнивая коэффициенты α и β имеем, что $\beta=2\alpha$. Это означает, что точка M является серединой отрезка BN, что и требовалось доказать.

б) Угол между плоскостями SBA и SBC равен углу между прямыми AM и CN, перпендикулярными линии пересечения этих плоскостей. Найдем сначала угол между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{CN}$. Используя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику BSO, получим: $SB^2=SO^2+OB^2$,

$SB^2=\overline{c}^2+\overline{a}^2+\overline{b}^2,\ 8^2=\overline{c}^2+4+8,\quad |\overline{c}|=\sqrt{52}$.

Используя значения коэффициентов α и β, полученные в пункте

а): α=$\frac{1}{8}$, $\beta=\frac{1}{4}$.

Подставим эти значения в разложения векторов $\overline{AM}$ и $\overline{CN}$:

$$\overline{AM} = 2\bar{b} + \frac{1}{8}\left(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}\right) = \frac{1}{8}\bar{a} + \frac{15}{8}\bar{b} + \frac{1}{8}\bar{c}.$$

$$\overline{CN} = -2\bar{a} + \frac{1}{4}\left(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}\right) = -\frac{7}{4}\bar{a} - \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{4}\bar{c}.$$

Вычислим косинус угла между этими векторами:

$$\cos(\overline{AM},\ \overline{CN}) = \frac{\overline{AM}\ \cdot \overline{CN}}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{CN}|} = \frac{-2}{\frac{1}{8} \cdot \sqrt{960}\ \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{488}} = -\frac{1}{\sqrt{105}}.$$

Если косинус угла меньше нуля, то векторы образуют тупой угол. Поэтому искомый угол между плоскостями SBA и SBC равен смежному с найденным углу $\alpha = arccos\frac{1}{\sqrt{105}}$.

Выводы

В школьном курсе математики вопросам взаимного расположения прямых и плоскостей не уделяется должного внимания, хотя задачи на эту тему регулярно предлагаются в материалах ЕГЭ по математике и на вступительных экзаменах в ведущие вузы [3]. При решении таких задач эффективно можно использовать координатный метод. Следует отметить, что векторно-координатный метод также можно использовать для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, расстояния от точки до плоскости [4].

Литература

1. Атанасян Л. С. Геометрия 10-11. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2009. 255 с.
2. Гаджимурадов М. А. Практикум по элементарной геометрии. Учебное пособие. Махачкала: Изд-во Алеф, 2014. 108 с.
3. Гаджимурадов М. А. Формирование и развитие пространственного мышления на уроках геометрии с помощью компьютерных технологий // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2019. Т. 13 № 3.
4. Севрюков П. В. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии. Учебное пособие. М.: Илекса: НИИ школьных технологий. Ставрополь. Сервис школа, 2008. 163 с.
5. Единый государственный экзамен. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. Под ред. И. В. Ященко, 2023.

References

1. Atanasyan L. S. *Geometriya 10-11. Uchebnik dlya obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdenij* [Geometry 10-11. Textbook for general education institutions]. Moscow: Enlightenment, 2009. 255 p. (In Russian)
2. Gadzhimuradov M. A. *Praktikum po ehlementarnoj geometrii. Uchebnoe posobie* [Practicum on elementary geometry. Textbook. Makhachkala, Alef, 2014. 108 p. (In Russian)
3. Gadzhimuradov M. A. *Formirovanie i razvitie prostranstvennogo myshleniya na urokakh geometrii s pomoshch'yu komp'yuternykh tekhnologij* [Formation and development of spatial thinking in geometry lessons using computer technology]. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences. 2019. Vol. 13. No. 3. (In Russian)
4. Sevryukov P. V. *Vektory i koordinaty v reshenii zadach shkol'nogo kursa stereometrii. Uchebnoe posobie* [Vectors and coordinates in solving problems of the school course of stereometry. Textbook]. Moscow: Ilex: Research Institute of School Technologies. Stavropol. Service school, 2008. 163 p. (In Russian)
5. *Edinyj gosudarstvennyj ehkzamen. Matematika. Profil'nyj uroven'. Tipovye ehkzamenacionnye varianty* [Unified State exam. Mathematics. Profile level. Typical exam options]. Edited by I. V. Yaschenko, 2023.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Принадлежность к организации

Гаджимурадов Мадрид Абдуллаевич, кандидат физико-математических наук, профессор, кафедра высшей математики, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия, e-mail: matanaliz-dgpu@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Affiliations

Madrid A. Gadzhimuradov, Ph. D. (Physical and Mathematical Sciences), professor, the chair of Higher Mathematics, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: matanaliz-dgpu@mail.ru

Гаджиева Зульфия Джамалдиновна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова, Махачкала, Россия; e-mail: gadzhievazulfiyaa@mail.ru

Zulfiya D. Gadzhieva, Ph. D. (Physical and Mathematical Sciences), assistant professor, the chair of Higher Mathematics, Gamzatov Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia; e-mail: gadzhieva zulfiyaa@mail.ru

Принята в печать 18.07.2024 г.

Received 18.07.2024.

Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Article
УДК: 611.8:378.14
DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-3-44-47

Пути улучшения памяти студентов (на примере кафедры анатомии человека)

© 2024 Гусейнова С. Т., Эседова А. Э., Курбанова П. А.
Дагестанский государственный медицинский университет,
Махачкала, Россия; e-mail: vagabova80@mail.ru, zarema150198@gmail.com, pvtya80@mail.ru

РЕЗЮМЕ. Цель. Изучение способов улучшения памяти студентов с целью повышения уровня образования. **Метод.** Анализ психолого-педагогической, медицинской литературы. **Результаты.** Авторами приведены все виды памяти, их локализация, мотивационные аспекты, направленные на улучшение качества знаний студентов. **Вывод.** Профессорско-преподавательский состав должен помочь студентам кафедры анатомии улучшить отношение к профессии врача, научить анализировать, преодолевать отчужденность, пассивность и мнимую легкоусвояемость. Фундаментальным базисом учебы является мотивация, умение синтезировать и обобщать многие интересные факты, цифры, идеи и фиксировать в памяти в коре головного мозга в течение всей жизни.

Ключевые слова: анатомия человека, память, студенты.

Формат цитирования: Гусейнова С. Т., Эседова А. Э., Курбанова П. А. Пути улучшения памяти студентов (на примере кафедры анатомии человека) // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2024. Т. 18. № 3. С. 44-47. DOI: 10.31161/1995-0659-2024-18-3-44-47

Ways to Improve Students' Memory (Using the Example of the Department of Human Anatomy)

© 2024 Sabina T. Guseynova, Angela E. Esedova, Patimat A. Kurbanova
Dagestan State Medical University,
Makhachkala, Russia; e-mail: vagabova80@mail.ru,
zarema150198@gmail.com, pvtya80@mail.ru

ABSTRACT. Aim. The study of ways to improve students' memory in order to improve the level of education. **Method.** Analysis of psychological, pedagogical, and medical literature. **Results.** The authors present all types of memory, their localization, and motivational aspects aimed at improving the quality of students' knowledge. **Conclusion.** The teaching staff should help students of the Department of Anatomy improve their