Педагогические науки / Pedagogical Science
Оригинальная статья / Original Article
УДК 371
DOI: 10.31161/1995-0675-2021-15-4-74-79

# Задачи на движение как средство развития математического воображения младших школьников

©2021 **Гашаров Н. Г., Махмудов Х. М., Нурмагомедов Д. М.**
Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия,
nisred47@mail.ru, kheyrullah@mail.ru, dibir52@mail.ru

**РЕЗЮМЕ. Цель** – исследование проблемы развития воображения младших школьников в процессе их обучения математике, различных подходов по организации решения этой проблемы и обоснование актуальности её решения в ходе использования дидактических возможностей задач на движение. **Методы.** Анализ научной и психолого-педагогической литературы, сопоставление, обобщение. **Результаты.** Приведены примеры ключевых задач на движение с методикой работы над ними, которые показали свою эффективность в процессе работы с учащимися. **Выводы.** Использование на уроках различных приёмов работы над конвергентными и дивергентными задачами на движение способствует развитию математического воображения младших школьников.

**Ключевые слова**: воображение, развитие, мышление, математическая задача, задача на движение, дивергентная и конвергентная задача

**Формат цитирования:** Гашаров Н. Г., Махмудов Х. М., Нурмагомедов Д. М. Задачи на движение как средство развития математического воображения младших школьников // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2021. Т. 15. № 4. С. 77–82. DOI: 10.31161/1995-0675-2021-15-4-74-79

# Motion Problems as a Means of Developing the Younger Schoolchildren's Mathematical Imagination

©2021 **Nisred G. Gasharov, Kheyrullah M. Mahmudov, Dibirasulav M. Nurmagomedov**
Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia, nisred47@mail.ru, kheyrullah@mail.ru, dibir52@mail.ru

**ABSTRACT.** The **aim** of the article is to study the problem of developing the imagination of younger schoolchildren in the process of their teaching mathematics, the study of various approaches to organizing the solution of this problem and substantiating the relevance of its solution in the course of using the didactic possibilities of movement tasks. **Methods.** Analysis of scientific and psychological-pedagogical literature, comparison, generalization. **Results.** Examples of key tasks for the movement with the methodology of working on them, which have shown their effectiveness in the process of work with students, are given. **Conclusions.** It is shown that the use of various methods of working on convergent and divergent motion problems in the classroom contributes to the development of both convergent and divergent mathematical imagination of younger schoolchildren.

**Keywords:** imagination, development, thinking, mathematical problem, movement problem, divergent and convergent problem

**For citation:** Gasharov N. G., Mahmudov Kh. M., Nurmagomedov D. M. Motion Problems as a Means of Developing the Younger Schoolchildren's Mathematical Imagination. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences, 2021, vol. 15, no. 4, pp. 74–79. DOI: 10.31161/1995-0675-2021-15-4-74-79 (In Russian)

**Введение**

Современная эпоха многими своими знаковыми достижениями обязана уровню развития математических методов познания, поэтому современная школа делает многое для формирования у учащихся положительного отношения к математическому образованию. Этому способствуют использование различных видов проблемно-развивающего обучения, оптимальное сочетание разных методов и форм дифференцированной, индивидуальной, коллективной и групповой работы, учет возрастных особенностей школьников и т. д.

Однако приходится признать, что интерес к математическим знаниям от класса к классу уже в начальной школе в должной мере не возрастает и, что важно, не всегда приобретает у детей форму внутреннего активного и сознательного познавательного интереса, необходимого для эффективной реализации методических учебных приемов.

**Цель** исследования – обоснование актуальности развития математического воображения младших школьников применительно к обучению решению задач на движение.

**Результаты и обсуждение**

На «отход от математических методов познания» и соответствующий «мотивационный вакуум», наблюдаемый уже начиная со старших классов начальной школы, с тревогой обращает внимание научно-педагогическая общественность, что нашло отражение в литературе [1].

Чем же определяется уровень математической подготовки? Ни соответствующие программы, ни перечень разделов их уровень не определяют. Единственный способ реально узнать, каков математический «багаж» учащихся, – это перечислить типы наиболее востребованных задач, которые они должны научиться решать в результате обучения. Речь идет не о каких-либо трудных задачах или задачах так называемой «спортивной математики», а о строго необходимом минимуме несложных вопросов. Таких задач в обязательном порядке должно быть много, и сформированность навыков их решения следует строго контролировать.

Сказанное хорошо согласуется и с мнением известного математика Д. Пойа: владение математикой означает умение решать задачи, и не только стандартного вида, но и повышенной трудности, требующие изобретательности, здравого смысла и оригинальности.

Следует привести и слова академика В. И. Арнольда, сказанные им в свое время на традиционном собрании аспирантов механико-математического факультета МГУ и высеченные впоследствии на его могильной плите: «Будучи по профессии математиком, я вынужден в своей работе постоянно опираться не на доказательства, а на ощущения, догадки и гипотезы, переходя от одного факта к другому при помощи того особенного вида озарения, который заставляет усматривать общие черты в явлениях, быть может, кажущихся вовсе не связанными между собой постороннему».

Главная психологическая причина проблем математического образования, на наш взгляд, с одной стороны, заключается в недостаточном внимании к формированию учебной математической деятельности в единстве ее компонентов – мотивов, учебных действий, действий самоконтроля, с другой стороны, психологические характеристики учебной деятельности – ее строение, возрастные особенности – не в полной мере актуализированы психологами и не доведены до такого состояния, чтобы быть основой практики учителя.

Приоритет в решении этой проблемы принадлежит начальному этапу математического образования, поскольку в психологии именно возраст детей от 7 до 13 лет считается наиболее важным при формировании их интеллекта, что предполагает гармоничное взаимодействие в процессе обучения и логического, и образного компонентов.

Нам представляется, что начинать следует с развития математического воображения учащихся, поскольку недоразвитость математического видения и отсутствие математического воображения ставит крест на успешности изучения даже простейших математических истин и закономерностей. Мы были свидетелями такой педагогической ситуации во втором классе обычной средней школы-лицея Махачкалы. На уроке математики ученик у доски столбиком решал пример: 568 – 336. Найти уже первую разность 8 – 6 ученик затруднился. Учитель предложил нарисовать 8 палочек, зачеркнуть 6 и посчитать, сколько осталось. В беседе после урока учитель жаловался, что часть учащихся никак не могут усвоить более интеллектуальные способы выполнения арифметических операций.

Воображение определяется как психический процесс, природа которого характеризуется чувственным и абстрактным уровнями отражения объективной реальности, и потому его дифференцируют на сенсорно-перцептивные и словесно-логические компоненты. Очевидно, воображение является элементом продуктивной творческой деятельности, а на начальном этапе изучения математики оказывает серьезное влияние на развитие креативности детей.

Воображение как процесс исследуется в трудах А. В. Брушлинского, Л. М. Веккера, Л. С. Выготского, В. В. Давыдова, А. Я. Дудецкого, Е. И. Игнатьева, Л. С. Коршуновой, А. М. Матюшкина, А. В. Петровского, С. Л. Рубинштейна, В. Д. Шадрикова, Д. Б. Эльконина, М. Г. Ярошевского и др.

Большую роль воображение играет в решении текстовых задач, поскольку решение задачи является результатом совместной деятельности мышления и воображения. Читая условие задачи, ученик должен ясно представить себе данную в ней арифметическую ситуацию, изложенные факты и процессы в их связи и взаимодействии. А дальше, уяснив сущность поставленного вопроса, ученик должен мысленно наметить ход решения и план последовательных действий, приводящих к ответу на вопрос задачи.

Немалые трудности на разных ступенях обучения у школьников возникают при решении задач на движение. Движение (механическое) встречается компонентом фабулы в широком круге текстовых задач, относимых к различным типам и предполагающих разные способы решения. Вместе с тем задачи, фабула которых связана с функциональными зависимостями между тремя характеризующими движение величинами – расстоянием, временем и скоростью – причем эти величины в них наряду с числовым значением имеют еще и направление, традиционно объединяют в самостоятельный тип задач на движение.

Специфика отдельных видов, а также конкретных задач на движение определяется средой движения, условиями движения и характером движения. Ученики постоянно встречаются с процессами движения в повседневной жизни: бег наперегонки, езда на велосипеде (автомобиле, автобусе, поезде), плавание в бассейне (пруду, речке), вращение на каруселях, участие в подвижных аттракционах и т. п.

Решение подобных задач способствует развитию у детей пространственного воображения и усвоению ими зависимостей пропорционального характера между величинами расстояние, время и скорость. При этом велика методическая значимость графических образов. Стремление педагога к тому, чтобы ученики не просто формально понимали эти иллюстрации, но и научились сами использовать графику при решении задач на движение, конечно же, будет способствовать развитию математического воображения у учащихся.

Задачи на движение располагают богатым набором эффективных средств и приемов, необходимых для развития математического воображения учащихся. Однако традиционный путь изучения задач на движение в школе оставляет много пробелов в формировании как вербально-логического, так и наглядно-образного типов мышления. Этот путь в общем направлен на набор учащимися лишь определенного запаса конкретных ЗУН. Следствием практикуемой в школе методики изучения данного материала выступает то, что часть младших школьников, владея требуемыми представлениями и понятиями, не приобретают оперативных навыков при работе с геометрическими образами условия задачи, когда появляется необходимость в установке математических соотношений в иллюстрациях заданных условий. При работе с задачами такого рода следует не только знать основные параметры равномерного движения, но и уметь фиксировать свою точку зрения на различные составные части чертежа, подбирать те компоненты, которые требуются для поиска искомых, комбинировать фигуры на чертеже, переосмысливая их целесообразность в русле удовлетворения требованиям задачи.

То, что учащиеся не способны в достаточной мере воспринимать графическую или другую информацию, мысленно ее преобразовывать, вычленяя в ее составе необходимые для верного решения данной конкретной задачи элементы и включая их в новые отношения, можно ассоциировать с неразвитостью такого явления, как математическое видение, что является важной составляющей математического воображения учащихся. Математическое видение представляется начальной фазой процесса воображения. Средством его развития при методической работе с задачами на движение выступают такие проверенные приемы, как изменение условия задачи при сохранении её требования, изменение вопроса задачи при сохранении её условия, преобразование задачи, решение текстовой задачи другим способом, обращение задачи.

Завершается процесс воображения формированием математического объекта, под которым З. В. Тороповой понимается математическая абстракция (сам объект) и система знаний о нем [7, с. 3].

Далеко не в полной мере реализуемый на практике, но проверенный временем прием дополнительной работы над задачей после ее решения, безусловно, содержит в себе значительный дидактический потенциал (В. Г. Болтянский, Г. В. Дорофеев, В. А. Крутецкий, Л. М. Фридман и др.)

С целью развития математического вообраэжения наибольший эффект дает включение в процесс обучения математике приема обращения задачи, поскольку составление и решение обратных задач способствует лучшему осознанию фабулы задачи на движение, ее структуры, приводит к более глубокому пониманию взаимных математических отношений и связей, свойственных данной ситуации, позволяет ученикам увидеть взаимосвязи её данных и искомых, условия и вопроса.

Пусть, к примеру, исходная задача взята в такой формулировке:

**Задача 1**. Скорость дрона по ветру равна 35 м/сек, а собственная скорость дрона – 28 м/сек. Чему равна скорость дрона против ветра и скорость ветра? (Ответ: 21 м/сек, 7 м/сек).

В результате обращения данной задачи можно получить 7 задач:

1. Собственная скорость дрона равна 28 м/сек, а скорость ветра – 7 м/сек. Чему равны скорости дрона по ветру и против ветра?

2. Скорость дрона по ветру равна 35 м/сек, а скорость ветра – 7 м/сек. Чему равны собственная скорость дрона и скорость дрона против ветра?

3. Скорость дрона против ветра равна 21 м/сек, а собственная скорость дрона – 27 м/сек. Чему равны скорость ветра и скорость дрона по ветру?

4. Скорость дрона по ветру равна 35 м/сек, а против ветра – 21 м/сек. Чему равны скорость ветра и собственная скорость дрона?

5. Скорость дрона против ветра равна 21 м/сек, собственная скорость дрона – 28 м/сек. Чему равна скорость дрона по ветру?

6. Скорость дрона по ветру равна 35 м/сек, а против ветра – 21 м/сек. Чему равна собственная скорость дрона?

7. Скорость дрона против ветра равна 21 м/сек, а скорость ветра – 7 м/сек. Чему равны скорость дрона по ветру и собственная скорость дрона?

Процесс обращения задачи подобен процессу исследования определённой проблемы, поэтому такая методическая работа над задачей после ее решения прививает учащимся начала математического творчества, развивает креативность их мышления и позволяет формировать у детей умения учебно-исследовательской деятельности.

Решая задачи на движение, учащиеся анализируют различные математические тексты, выступающие инструментом усвоения теоретического материала и формирования умения решать задачи одновременно. Поэтому умение выполнять разносторонний анализ текста математической задачи, включающий выявление различных свойств и качеств описанного в задаче объекта, «исчерпание» из объекта свойств и качеств, имплицитно заданных, является необходимым умением для овладения математическим воображением. Для целенаправленного обучения этому умению целесообразно использовать задачи, в процессе решения которых активизируется мышление в разных направлениях, при этом можно четко управлять изменением направления мыслительного процесса за счет конструирования определенного текста задачи и организации работы с ним. Такими возможностями обладают задачи дивергентного типа, т. е. задачи, в процессе решения которых происходит дивергенция (расхождение направлений процесса математического воображения).

Термины «конвергентная задача» и «дивергентная задача» были предложены американским психологом Дж. Гилфордом [6]. К дивергентному типу задач относятся разнообразные по предметному содержанию, требующие при решении своеобразного превращения прямой связи мыслей в обратную, творческого подхода к решению, проблемные задания. Главное свойство таких задач – это то, что они допускают много правильных ответов. Именно с подобными задачами, когда требуется оценить и выбрать оптимальный ответ из имеющегося множества ответов, сталкивается человек в любой деятельности повседневной жизни.

Конвергентные задачи, как известно, предполагают существование лишь одного – «единственно верного» – ответа, который может быть найден при помощи строгих логических рассуждений на основе использования соответствующих законов, правил, алгоритмов, формул, теорем и т. д.

Время показало научную плодотворность идеи деления мышления на конвергентное и дивергентное Дж. Гилфорда, послужившей мощным толчком в исследованиях по проблемам развития творческого мышления детей во всем мире. Подход Гилфорда позволил взглянуть на проблему развития креативности мышления с более перспективных и прагматичных позиций.

Различные аспекты методики использования дивергентных задач в начальном курсе математики освещены в работах [2–5]. Среди дивергентных задач, доступных и полезных младшим школьникам, выделим дивергентные задачи на движение, которые показали дидактическую эффективность в процессе обучения математике и опытно-педагогической работы. Ниже приводим примеры дивергентных задач на движение с методикой обучения их решению младших школьников. Эти задачи будут весьма полезны методистам и учителям как при составлении задач такого типа, так и в ходе обучения их решению.

**Задача 2.** Турист проплыл на плоту по течению реки 12 км, а обратно возвратился на лодке, затратив на всё путешествие 10 ч. Какова скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 5 км/ч?

Ясно, что для старшеклассников эта задача конвергентная и сводится к решению квадратного уравнения. А для учащихся начальных классов эта задача дивергентная, которую они могут решить, опираясь на следующую идею: вернуться обратно турист сможет только в том случае, если скорость течения реки меньше, чем 5 км/ч, то есть 1, 2, 3 или 4 км/ч. Непосредственная проверка показывает, что фактически подходят только: 2 км/ч и 3 км/ч.

**Задача 3.** Расстояние между двумя автомашинами, движущимися по шоссе, 100 км. На каком расстоянии могут быть они через 1 час? Естественно, здесь возможны 4 случая, из которых 2 случая в одном и том же направлении и 2 случая в противоположных направлениях, в зависимости от взаимного расположения этих автомашин относительно друг друга. Для пояснения детям возможных ситуаций весьма желательно использование схематических рисунков. В результате получим 4 ответа: 40 км, 240 км, 80 км и 120 км.

**Задача 4.** Два мальчика в течение одного часа катались на лодке, при этом поочерёдно одному надо было грести вёслами, пока другой отдыхал. Сколько времени грёб веслами каждый из мальчиков? Ясно, что ответов много, ибо любая пара натуральных чисел в минутах, сумма которых равна 60 (мин) является ответом на вопрос задачи.

**Задача 5.** С двух площадок, расстояние между которыми 500 м, одновременно запустили два дрона. Скорость каждого дрона 50 м/мин. На каком расстоянии они окажутся через 5 мин?

В условии задачи есть неопределенность, поскольку неизвестны направления движения дронов. Она и порождает множество правильных ответов (от 0 до 1000 м). Чтобы школьники могли найти как можно больше решений задачи, надо помочь им составить модель задачи в виде чертежа.

**Выводы**

Рассмотренные приёмы работы над задачами на движение, такие как моделирование, обращение, преобразование и работа над задачей после её решения, являются весьма важными и действенными стимулами для развития математического воображения учащихся. Предложенный ряд конвергентных и дивергентных ключевых задач на движение с методикой обучения их решению способствует эффективному развитию у учащихся воображения.

Литература

1. Арнольд В. И. Математический тривиум // Успехи математических наук. 1991. Т. 46. Вып. 1 (277). С. 225–232.

2. Гашаров Н. Г., Махмудов Х. М. Использование дивергентных задач в начальном курсе математики // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2011. № 1. С. 82–86.

3. Гашаров Н. Г., Махмудов Х. М. Дивергентные задачи – средство развития творческого мышления младших школьников // Начальная школа. 2014. № 2. С. 29–33.

**4.** Гашаров Н. Г., Махмудов Х. М., Магомедов Н. Г. Дивергентные задачи с геометрическим содержанием в начальном курсе математики // Мир науки, культуры, образования. 2016. № 6 (61). С. 168–171.

**5.** Гашаров Н. Г., Махмудов Х. М., Нурмагомедов Д. М. Дивергентные задачи как средство преодоления туннельного мышления у младших школьников // Мир науки, культуры, образования. 2020. № 5 (84). С. 158–160.

**6.** Гилфорд Дж. Три стороны интеллекта // Психология мышления. М.: Прогресс, 1965. С. 433–456.

**7.** Торопова З. А. Обучение старшеклассников проектированию математического объекта в курсе геометрии. Автореф. дис. … канд. пед. наук. СПб., 2012. 24 с.

## References

**1.** Arnold V. I. *Matematicheskij trivium* [Mathematical trivium]. Russian Mathematical Surveys, 1991, vol. 46, iss. 1 (277), p. 225–232 (in Russian).

**2.** Gasharov N. G., Mahmudov H. M. *Ispol'zovanie divergentnyh zadach v nachal'nom kurse matematiki* [The use of divergent problems in an elementary mathematics course]. Dagestan State Pedagogical University. Journal. Psychological and Pedagogical Sciences, 2011, no. 1, pp. 82–86 (in Russian).

**3.** Gasharov N. G., Mahmudov H. M. *Divergentnye zadachi – sredstvo razvitiya tvorcheskogo myshleniya mladshih shkol'nikov* [Divergent tasks are a means of developing creative thinking in junior schoolchildren]. Nachal'naya shkola, 2014, no. 2, pp. 29–33 (in Russian).

**4.** Gasharov N. G., Mahmudov H. M., Magomedov N. G. *Divergentnye zadachi s geometricheskim soderzhaniem v nachal'nom kurse matematiki* [Divergent problems with geometric content in an elementary mathematics course]. “The World of Science, Culture, Education”, 2016, no. 6 (61), pp. 168–171 (in Russian).

**5.** Gasharov N. G., Mahmudov H. M., Nurmagomedov D. M. *Divergentnye zadachi kak sredstvo preodoleniya tunnel'nogo myshleniya u mladshih shkol'nikov* [Divergent tasks as a means of overcoming tunnel thinking in junior schoolchildren]. “The World of Science, Culture, Education”, 2020, no. 5 (84), pp. 158–160 (in Russian).

**6.** Guilford J. P. *Tri storony intellekta* [Three faces of intellect]. Psihologiya myshleniya, Moscow, Progress, 1965, pp. 433–456 (in Russian).

**7.** Toropova Z. A. *Obuchenie starsheklassnikov proektirovaniyu matematicheskogo ob"ekta v kurse geometrii* [Teaching high school students how to design a mathematical object in a geometry course]. Extended abstract of candidate’s thesis, Saint Petersburg, 2012, 24 p. (in Russian)

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
### Принадлежность к организации

**Гашаров Нисред Гусейнович**, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретических основ и технологий начального математического образования, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия, nisred47@mail.ru

**Махмудов Хейруллах Махмудович**, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра теоретических основ и технологий начального математического образования, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия, kheyrullah@mail.ru

**Нурмагомедов Дибирасулав Мансурович**, кандидат педагогических наук, профессор, кафедра теоретических основ и технологий начального математического образования, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, Россия, dibir52@mail.ru

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS
### Affiliations

**Nisred G. Gasharov**, Ph. D. (Physics and Mathematics), assistant professor, the chair of theoretical bases and technologies initial mathematical education, Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia, nisred47@mail.ru

**Kheyrullah M. Mahmudov**, Ph. D. (Physics and Mathematics), assistant professor, the chair of theoretical bases and technologies initial mathematical education, Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia, kheyrullah@mail.ru

**Dibirasulav M. Nurmagomedov**, Ph. D. (Pedagogy), professor, the chair of theoretical bases and technologies initial mathematical education, Dagestan State Pedagogical University, Makhachkala, Russia, dibir52@mail.ru

*Принята в печать 28.10.2021.*

*Received 28.10.2021.*