УДК 514.11, 511.2

ПРИМЕНЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ-ПРИНЦИПА ПРИ РАЗРЕШЕНИИ МЕТОДИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

USING THE LIMITATION-PRINCIPLE WHEN SOLVING THE METHODOLOGICAL AND MATHEMATICAL PROBLEMS

© 2014 **Мутова С. Н., Вакилов Ш. М., Челябов И. М.**
Дагестанский государственный педагогический университет
© 2014 **Mutova S. N., Vakilov Sh. M., Chelyabov I. M.**
Dagestan State Pedagogical University

Резюме. *В статье отмечается, что ограничение не только средство, но принцип, и показана его роль при разрешении вопросов методики математики.*

Abstract. *The authors of the article note that the limitation is not only the tool, but the principle. They show its role in solving the problems of mathematical methodology.*

Rezjume. *V stat'e otmechaetsja, chto ogranichenie ne tol'ko sredstvo, no princip, i pokazana ego rol' pri razreshenii voprosov metodiki matematiki.*

Ключевые слова: *ограничение в выборе, разрешение, методико-математические вопросы.*
Keywords: *limitation in choice, solution, methodical- mathematical problems.*
Kljuchevye slova: *ogranichenie v vybore, razreshenie, metodiko-matematicheskie voprosy.*

Впервые необходимость и перспективность учебной работе в школе при обучении учащихся математике внес П. К. Магомедбеков [1].

Дальнейшее развитие тема получила в работах [2; 4 – 6], в которых выдвигается идея рассмотрения ограничения не только как средства, но и как принцип. Она основывается на широте применения средства ограничения при разрешении методико-математических вопросов, следствием которой является развитие творческого мышления учащихся, возможность разрешения проблемы изучения математики вглубь, а не вширь, вооружения учащихся методами решения математических задач, развития их математического творчества.

Что же понимать под «Средствами разрешения методико-математических вопросов»?

Под этим понятием здесь мы подразумеваем:

а) тот или иной курс математической дисциплины;

б) отдельный раздел той или иной математической теории;

в) различные теоремы;

г) методы решений (доказательств, построений, вычислений);

д) чертежные инструменты;

е) геодезические приборы;

ж) прочие приборы (в т. ч. компьютер и ЭВМ).

Под ограничением в выборе средств при разрешении вопросов мы будем понимать временное целенаправленное запрещение использования какой-либо теоремы или ряда теорем, того или иного раздела курса, какого-либо метода рассуждения, дополнительных построений, части представляемых возможностей какого-либо инструмента или прибора, произвольности в размерах чертежа.

С ограничительными ситуациями нам приходится сталкиваться на каждом шагу при решении задач и доказательстве теорем. Само слово «выбор» (а мы всегда что-то выбираем) – не что иное, как разумное и намеренное ограничение, временное или специальное отвлечение от того, что нас не интересует в данный момент или вообще, так как всякая область исследования имеет определенную специфику, специализацию. Наука математика, как и другие науки, имеет свои методы исследования. Вот уже ограничительная ситуация – выбор!

Возьмем геометрию. Все ее теоремы, при наличии определенного числа первичных понятий, выводятся из аксиом, а число их должно быть таким, чтобы все истинные предложения (теоремы) выбранной геометрии могли быть доказанными с их помощью; чтобы не могло возникнуть противоречия; чтобы эти аксиомы были независимыми.

При такой постановке вопроса любая часть выбранной системы аксиом окажется недостаточной для доказательства каждого предложения, справедливого в выбранной системе аксиом.

Однако имеется множество предложений, в справедливости которых мы можем убедиться с помощью определенной части аксиом. Допустим, мы и поставили такую задачу. Вот уже яркий пример специального ограничения в математике. Возникает вопрос: какова цель введения тех или иных ограничений в математике?

Разумеется, что ограничения вводятся не ради ограничений, введение ограничений – не удовлетворение каприза, не праздная игрушка, а важнейшая движущая сила развития математики и методики ее преподавания.

Если мы интересуемся значением той или иной теоремы в школьном курсе геометрии (а это весьма важная задача методики, в смысле отбора материала), то для этого необходимо раскрыть максимум возможностей ее применения, роль ее в системе других теорем (возможно, что без нее можно обойтись безболезненно, а может быть, и наоборот; возможно, что ее целесообразнее изучить в другом разделе, в силу упрощения ее доказательства и большей значимости в этом разделе). Все это интересные вопросы методики преподавания математики. Одна и та же задача может решаться средствами элементарной геометрии, тригонометрии, аналитической геометрии, проективной геометрии и др. Задача из курса арифметики может быть решена также и средствами алгебры.

Выбор средств решения будет зависеть от условий и требований, предъявляемых к решающему. Школьный курс геометрии представляет систему связанных между собой истин о свойствах геометрических образов, поэтому на той или иной стадии обучения учащийся, естественно, находится в определенных ограничительных условиях, в смысле использования средств геометрии для решения задач.

Иногда бывает весьма целесообразно сузить круг средств, т. е. запретить ученику временно пользоваться некоторыми из известных ему средств. Учащийся, поставленный в такие ограничительные условия, старается найти выход из создавшегося положения и поэтому вынужден работать творчески. Решение задач с ограничениями в выборе средств вызывает у учащихся большой интерес, активизирует их, благотворно отражается на развитии творческих способностей. Надо заметить, что такая работа способствует росту самого учителя.

Задаваясь каким-либо ограничением, мы ясно должны представлять цель, ради которой это ограничение вводится.

Если мы хотим получить от учащихся ряд вариантов решения одной и той же задачи (что очень важно), то подбираем специально такие задачи, которые допускают много путей решения, и даем классу полную свободу в выборе предложенных учителем средств решения, подчеркивая при этом многовариантность разрешимости этих задач. Решенные задачи сверяются, ученики сами объясняют выбор того или иного варианта решения. На первых порах такую работу следует начинать с наиболее простых (по замыслу) задач.

Опыт показывает, что таких простых задач, допускающих вариантность поисков решения, более чем достаточно. Было бы очень интересно включить в Кимы ЕГЭ такие задачи. Приведем варианты решений одной задачи, которую мы предлагали учащимся 7-8-х классов на внеклассном занятии.

Задача № 1. Построить несколькими способами равносторонний треугольник по данной его высоте h.

Решение

1-й вариант. (Не пользоваться циркулем). От конца *B*, данного отрезка $BD = h$ проведем два луча, составляющие с ним угол, равный 30°. Из точки *D* восставим перпендикуляр к ВД до пересечения с лучами в точках *A* и *C*. ΔABC – искомый.

2-й вариант. Строим $\angle MCN = 60°$. На расстоянии *h* от луча *CN* отметим точку *B*. Пусть точка *D* – на луче *CM.* Тогда, отобразив точку *C* относительно точки *D*, на луче *CM* получим точку *C*. ΔABC – искомый.

3-й вариант (воспользоваться циркулем). В равностороннем треугольнике высоты являются одновременно и медианами и равны между собой. Точка пересечения медиан отсекает от каждой соответственно равные отрезки.

Пусть в равностороннем ΔABC, *O* – точка пересечения медиан. Если ВД – медиана, то $OD = \frac{1}{3}BD$, $OC = OA = OB$, поэтому строим прямой угол с вершиной в точке *D* и со стороной *BD*, откладываем $OD = \frac{BD}{3}$. Радиусом *OB* описываем окружность, которая пересечет вторую сторону (прямую) построенного угла в точках *A* и *C*. Δ ABC – искомый.

4-й вариант (использовать свойство точки, лежащей на биссектрисе угла). А**нализ**. В треугольнике *ABC BD, CE* и *AF* – высоты.

Из середины AC опустим перпендикуляры DH и DK на стороны AB и BC, тогда $DK= DH= \frac{1}{2}h$.

Построение. В некоторой точке D прямой a восставим $h = DB\perp a$. Из точки D, радиусом $\frac{h}{2}$, проводим окружность, а к ней – касательные из точки B, которые пересекут прямую a в точках A и C. ΔABC – искомый.

5-й вариант (воспользоваться свойством круга, вписанного в правильный треугольник). Радиус вписанного в треугольник круга равен $\frac{1}{3}$ высоты. Поэтому строим $BD=h$; $h\perp a$, затем отрезок $OD = \frac{1}{3}BD$. Описываем окружность O (OD). Из точки B проводим касательные к ней, до пересечения с прямой a.

6-й вариант (воспользоваться методом подобия). Строим произвольный равносторонний треугольник, с данной высотой h. (И здесь сталкиваемся с различными подходами к построению).

7-й вариант (воспользоваться алгебраическим методом) $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $a=\frac{2h\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{h\sqrt{3}}{2}$. Строим на h, как на стороне, правильный треугольник, проводим высоту, берем $\frac{4}{3}$ ее. Это и будет сторона искомого треугольника.

Существует еще ряд других вариантов решения этой задачи с ограничениями.

Заметим, что в практике работы с учащимися мы всегда ограждали их от указаний к решению задач, помещенных в задачниках, и методических указаниях, учебниках, показывая на примерах неудачность, нерациональность многих рекомендаций.

Действительно, ведь такие указания показывают только один из путей решения задачи. Однако, немало учителей слепо следует этим указаниям, идя по линии наименьшего сопротивления. При этом убивается инициатива не только учащихся, но и учителя, и о развитии творчества детей не может быть и речи. Для подтверждения наличия такого недостатка в работе учителя приведем результат одного любопытного эксперимента проведенного нами.

Рассмотрим следующую задачу: «*Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине*», к которой в учебнике А. П. Киселева [3] есть и указание к ней, которое выражается в рекомендации: продолжить медиану на отрезок, равный медиане, а затем из конца этого отрезка провести отрезки, соединяющие его с вершинами острых углов треугольника.

Если руководствоваться этой рекомендацией, то учащиеся (и не только они) будут испытывать определенные трудности в доказательстве, так как решение задачи требует двойного установления равенства треугольников, а, следовательно, опосредственного убеждения в существовании указанной зависимости.

Мы предложили эту задачу некоторым учителям с оговорками:

1. Задача должна быть отнесена к разделу «Сумма углов треугольника».

2. Какие-либо дополнительные построения, кроме проведения медианы, недопустимы. Почти все попытки решений представляли собой всевозможные манипуляции с углами без использования факта наличия медиан и поэтому приводили либо к «порочному кругу», либо к таким истинам, как «сумма углов треугольника равна $2d$», «сумма смежных углов составляет $2d$» и т. д. В действительности эта задача имеет красивые и довольно простые способы решения. Приведем два из них.

1-й вариант. Дан прямоугольный треугольник BAC, AD – медиана гипотенузы BC. Необходимо доказать, что $AD = DC$ (рис. *1*).

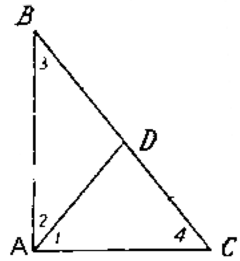

рис.1

Доказательство:

Допустим, что $AD\neq DC$, тогда AD либо больше, либо меньшеDC.

а) Предположим, что $AD>DC$. Тогда AD и больше BD и $\angle$ 4> $\angle$ 1,

$\angle$ 3 > $\angle$ 2. Но тогда $\angle$ 4 + $\angle$ 3> $\angle$ 1 + $\angle$ 2, что противоречит условию;

б) Аналогично рассуждая, покажем несостоятельность соотношения AD<DC. Следовательно, остается принять, $AD = DC = BD$.

2-й вариант. Докажем это же предложение, не пользуясь методом от противного. Пусть дан прямоугольный треугольник BAC. Проведем из вершины прямого угла прямую AD под углом 1, равным углу 4. Тогда $AD = DC$ и $\angle$ 2 = $\angle$ 3 (как дополнения до 90^0), а поэтому и $AD = BD$. Следовательно, AD – медиана и равна половине гипотенузы.

Приведенные нами примеры еще раз подтверждают мысль о том, что целенаправленные ограничения в выборе средств дают возможность в большей мере извлечь пользу из изучаемого теоретического материала, значительно расширяя аппарат приемов решения.

При изучении дальнейшего теоретического материала (знакомства учащихся с новыми теоремами) перед учителем и учащимися открываются новые горизонты поля деятельности, представляются более простые способы решения тех же задач с помощью новых теорем.

Когда мы возвращаемся к некоторым ранее решенным задачам после изучения новых теорем, то встречаемся с противоречивой проблемой.

С одной стороны, мы ограничиваем учащегося в выборе средств, т. е. предлагаем ему при решении задачи использовать именно вновь изученную теорему. С другой стороны, мы тем самым расширяем аппарат, которым он может воспользоваться, так как к числу известных ему способов решения добавляется ряд новых.

Правильное разрешение этой проблемы позволит получить ответ на такой важный вопрос методики преподавания математики, как умелое проведение подготовительной работы по наведению учащихся на открытие новых закономерностей, по воспитанию у них потребности в изучении последующих теорем курса.

Литература

1. Магомедбеков П. К. Очерки преподавания геометрии в школе. Махачкала: Дагучпедгиз. 1970. 195 с. **2.** Магомедбеков П. К., Мирзаев С. М., Челябов И. М. Принципы и средства развития творчества учащихся по математике. Махачкала: Изд-во ДИПКПК.2001. 66 с. **3.** Кисилев А. П. Геометрия. Учебник для 7-9 кл. СШ. М.: Просвещение. 1956. **4.** Мирзаев С. М. Методика формирования исследовательских умений у учащихся 7-9 классов на основе применения приемов ограничения и обобщения (в процессе обучения математике). Дисс…канд. пед. наук. Махачкала. 2004. 162 с. **5.** Челябов И. М. Разработка системы организации исследовательской работы учащихся в процессе изучения факультатива 7-11 классов. Дисс…канд. пед. наук. Махачкала. 1999. 178 с. **6.** Челябов И. М., Мутова С. Н. Ограничение как принцип методики математики / Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Теория и практика применения математического моделирования и информационных технологий в науке, технике и образовании». М. : МГОУ. 2010.

References

1. Magomedbekov P. K. Essays on teaching the Geometry at school. Makhachkala: Daguchpedgiz. 1970. 195 p. **2.** Magomedbekov P. K., Mirzaev S. M., Chelyabov I. M. Principles and tools for the development of creativity of pupils in Mathematics. Makhachkala: DIPQPS Publishing. 66 p. **3.** Kisilev A. P. Geometry. Textbook for 7-9 grades of the secondary school. M. : Prosveshchenie. 1956. **4.** Mirzaev S. M. Methods of developing the research skills of pupils in 7-9 grades by applying the techniques of limitation and generalization (in learning mathematics). Diss…Cand. Pedagogy. Makhachkala. 2004. 162 p. **5.** Chelyabov I. M. The development of the organization system of research work of pupils in the learning process of facultative of 7-11 grades. Diss…Cand. Pedagogy. Makhachkala. 1999. 178 p. **6.** Chelyabov I. M., Mutova S. N. The limitation as a principle of mathematical methodology / The materials of the all-Russian scientific and practical conference "Theory and practice of mathematical modeling and information technologies in science, engineering and education". M. : MSOU. 2010.

Literatura

1. Magomedbekov P. K.Ocherki prepodavanija geometrii v shkole. Mahachkala: Daguchpedgiz. 1970. 195 s. **2.** Magomedbekov P. K., Mirzaev S. M., Cheljabov I. M. Principy i sredstva razvitija tvorchestva uchashhihsja po matematike. Mahachkala: Izd-vo DIPKPK.2001. 66 s. **3.** Kisilev A. P. Geometrija. Uchebnik dlja 7-9 kl. SSh. M.: Prosveshhenie. 1956. **4.** Mirzaev S. M. Metodika formirovanija issledovatel'skih umenij u uchashhihsja 7-9 klassov na osnove primenenija priemov ogranichenija i obobshhenija (v processe obuchenija matematike). Diss…kand. ped. nauk. Mahachkala. 2004. 162 s. **5.** Cheljabov I. M. Razrabotka sistemy organizacii issledovatel'skoj raboty uchashhihsja v processe izuchenija fakul'tativa 7-11 klassov. Diss…kand. ped. nauk. Mahachkala. 1999. 178 s. **6.** Cheljabov I. M., Mutova S. N. Ogranichenie kak princip metodiki matematiki / Materialy Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Teorija i praktika primenenija matematicheskogo modelirovanija i informacionnyh tehnologij v nauke, tehnike i obrazovanii». M. : MGOU. 2010.

Статья поступила в редакцию 16.05.2014 г.